SOS3003

Anvendt statistisk dataanalyse i samfunnsvitenskap

Oversikt over

Forelesingsnotat, vår 2003

Erling Berge
Institutt for sosiologi og statsvitskap
NTNU

PENSUM SOS 3003

- Hamilton, Lawrence C. 1992 "Regression with graphics", Belmont, Duxbury, Kap. 1-7 .
- Hardy, Melissa A. 1992 “Regression with dummy variables” Sage University Paper: QASS 93, London, Sage,
- Allison, Paul D. 2002 “Missing Data” Sage University Paper: QASS 136, London, Sage,

Mål for kurset

- Kunne lese faglitteratur som drøftar ”kvantitative” data kritisk
  - Vi skal kjenne fallgruvene
- Gjennomføre enkle analysar av samvariasjon i ”kvantitative” data
  - Vi skal demonstrere at vi kjenner fallgruvene

VARIABEL: SENTRALTENDENS

- GJENNOMSNITT $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Summen av verdiane på variabelen for alle einingane dividert på talet av einingar
- MEDIAN
- Den verdien i ei ordna fordeling som har halvparten av einingane på kvar side
- MODUS
- Den typiske verdien. Den verdien i ei fordeling som har høgast frekvens.

VARIABEL: SPREDNINGSMÅL I

- MODALPROSENTEN
- Prosent av einingane som har verdi lik modus
- VARIASJONSBREDDA
- Differansen mellom høgaste og lågaste verdi i ei ordna fordeling
- GJENNOMSNITSAVVIKET
- Gjennomsnittet av absoluttverdien til avviket frå gjennomsnittet
- KVARTILDIFFERENSEN
- Variasjonsbreidda for dei 50% av einingane som ligg rundt medianen (Q_3-Q_1)
- MAD - Median Absolute Deviation
- Medianen til absoluttverdien til skilnaden mellom median og observert verdi: MAD(x_i)=median |x_i - median(x_i)|

VARIABEL: SPREDNINGSMÅL II

- STANARDAVVIKET
- Kvadratrota av gjennomsnittleg kvadrert avvik frå gjennomsnittet

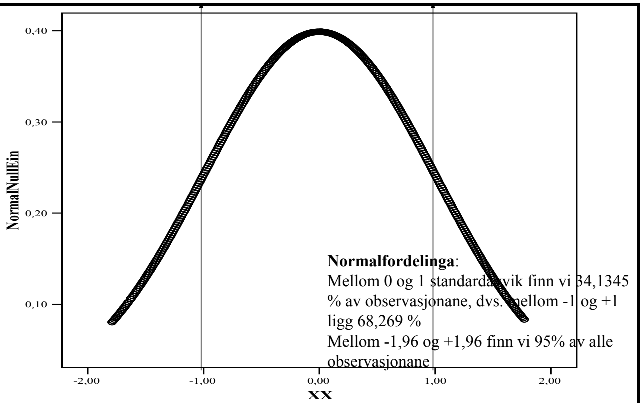
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

- VARIANSEN
- Kvadratet av standardavviket

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$$

Variabel: fordelingsform I

- Symmetriske fordelingar
- Skeive fordelingar
  - ”Tunge” og ”lette” halar
- Normalfordelingane
  - Er ikkje ”normale”
  - Er eintydig fastlagt av gjennomsnitt (μ) og standardavvik (σ)



Skeive fordelingar

- Positivt skeive har $\bar{Y} > Md$
- Negativt skeive har $\bar{Y} < Md$
- Symmetriske fordelingar har $\bar{Y} \approx Md$

Symmetriske fordelingar

- Medianen og IQR er resistente mot verknader av ekstreme verdiar. Gjennomsnitt og standardavvik er ikkje resistente
- I normalfordelinga er $s_y \approx IQR/1.35$
- Dersom vi i ei symmetrisk fordeling finn
  - $s_y > IQR/1.35$ er halane tyngre enn i normalfordelinga
  - $s_y < IQR/1.35$ er halane lettare enn i normalfordelinga
  - $s_y \approx IQR/1.35$ er halane omlag slik som i normalfordelinga

Potenstransformasjonar (jfr. H:17-22)

Y* : les "transformert Y"
(transformasjon fra Y til Y*)

- $Y^* = Y^q$ q>0
- $Y^* = \ln[Y]$ q=0
- $Y^* = -[Y^q]$ q<0

Invers transformasjon
(transformasjon fra Y* til Y)

- $Y = [Y^*]^{1/q}$ q>0
- $Y = \exp[Y^*]$ q=0
- $Y = [-Y^*]^{1/q}$ q<0

Potenstransformasjonar: konsekvensar

- $X^* = X^q$
  - q > 1 **aukar tyngda** til øvre hale relativt til nedre
  - q = 1 gir identitet
  - q < 1 **reduserer tyngda** til øvre hale relativt til nedre
- Dersom $Y^* = \ln(Y)$ vil regresjonskoeffisienten for ein intervallskala X variabel kunne tolkast som % endring i Y for ei einings endring i X

Variabel: fordelingsanalyse I

- Boksplott
  - Basert på kvartilverdiane og interkvartilavviket
  - Definerer nærliggjande utliggarar som dei som ligg innanfor intervalla $<Q_1 - 1.5IQR, Q_1>$ og $<Q_3, Q_3 + 1.5IQR>$ og fjerntliggjande utliggjarar dei som ligg utanfor grensene $< Q_1 - 1.5IQR, Q_3 + 1.5IQR >$

Variablar: fordelingsform II

- Kvantilar er ei generalisering av kvartilar og percentilar
- Kvantilverdiane er variabelverdiane som svarar til gitte fraksjonar (kvantilar) av det samla utvalet eller observasjonsmaterialet, t.d.
  - Medianen er 0.5 kvantilen (eller 50% percentilen)
  - Nedre kvartil er 0.25 kvantilen
  - 10% percentilen er 0.1 kvantilen osv.

Variabel: fordelingsanalyse II

- Kvantilplott
  - Plott av kvantilverdi mot variabelverdi
    - Lorentzkurva er ein spesialvariant av dette (gir oss Gini-indeksen)
- Kvantil-Normalplott
  - Plott av kvantilverdiane på ein variabel mot kvantilverdiane i ei normalfordeling med same gjennomsnitt og spreiing

Formulering av modellar

- Definisjon av elementa i modellen
  - variablar, feilledd, populasjon og utval
- Definisjon av relasjonar mellom elementa
  - utvalsprosedyre, tidsrekkefølgje av hendingar og observasjonar, likninga som bind elementa saman
- Presisering av føresetnader for bruk av gitt estimeringsmetode
  - tilhøve til substansteori (spesifikasjon)
  - fordeling og eigenskapar ved feilledd

Elementa i modellen

- Populasjon: kven eller kva er det vi ønskje å seie noko om?
- Utval: idealet er eit reint tilfeldig utval, om vi ikkje kan få det må vi vite nøyaktig korleis utvalsmetoden er knytt opp mot den avhengige variabelen (fenomenet) vi ønskjer å studere
- Variablar: fenomenet vi ønskjer å studere må kunne observerast og seiast å ha ulike tilstandar eller uttrykksformer i ulike einingar i den populasjonen vi observerer. Vi må finne variasjon.
- Feilledd: feilleddet er ein abstrakt sekk som inneheld alle dei mange aspekta av populasjonen som vi ikkje er i stand til å observere.

Relasjonar mellom elementa

- Utvalsprosedyre: skeive (biased) utval
- Tidsrekkjefølgje av hendingar og observasjonar
- Samvariasjon, genuin v.. spuriøs samvariasjon
  - Konklusjonar om kausalsamband krev genuin samvariasjon
- Likninga: relasjonar mellom variablar

Multippel regresjon: modell (1)

- Sett K = talet på parametrar i modellen (dvs. K-1 er talet på variablar). Da kan (populasjons) modellen skrivast
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + ... + \beta_{K-1} x_{i,K-1} + \varepsilon_i$

Multippel regresjon: modell (2)

Modellen kan skrivast

$y_i = E[y_i] + \varepsilon_i$

Dette tyder at

- $E[y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + ... + \beta_{K-1} x_{i,K-1}$
  $E[y_i]$ les vi som forventa verdi av y_i
- Målet med multippel regresjon er å finne nettoeffekten av ein forklaringsvariabel, dvs. effekten til variabel x etter at vi har kontrollert for variasjonen i alle dei andre forklaringsvariablane

Multippel regresjon: modell (3)

- Vi finn OLS estimata av modellen som dei b-verdiane i
  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + b_3 x_{i3} + ... + b_{K-1} x_{i,K-1}$
  ($\hat{y}_i$ les vi som estimert eller ”predikert” verdi av y_i)
  som minimerer kvadratsummen av residualane

$$RSS = \Sigma_i(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma_i e_i^2$$

Fullstendig observasjon

- Ville gjere det mogeleg å sette opp ein fullstendig spesifisert modell. Dette tyder at alle variablar som kausalt verkar på det fenomenet vi studerer (Y) er observert, dvs. inkludert i likninga
- Dette er i praksis umogeleg. Derfor nyttar vi feilleddet til å samle opp uobserverte faktorar

Eksperiment og partielle effektar

- I eksperiment granskar ein kausalsamband mellom to variable med kontroll for alle mogelege andre kausale faktorar
- Multippel regresjon er ei form for etterlikning av eksperimentet – ei nest beste løysing - og ligg nært opp til det som heiter kvasi-eksperimentel forskingsdesign
- Ein finn netto effekt (partiell effekt) av ein variabel ved å fjerne effekten av andre variablar

Konklusjonar om populasjonen

- Dersom vi trekkjer utval etter utval frå same populasjonen og estimerer same modellen på alle utvala vil parametrane varierer frå gong til gong. Fordelinga vi finn kallast samplingfordelinga til parameteren.
- Statistisk testteori er basert på at samplingfordelingane til dei parametrane vi er interessert i er kjente slik at vi kan gjere oss opp ein meining om skilnaden mellom ei teoretisk hypotese (H_0) og observasjonane er rimeleg

Samplingfordelingar

- Lagar vi eit histogram over ulike estimerte verdiar av t.d. β_1 vil vi sjå at b_1 har ei fordeling (ei samplingfordeling)
- Ulike parametrar og observatorar har ulike samplingfordelingar
- Regresjonsparametrane (b'ane) er t-fordelt
- Gjennomsnittet er normalfordelt

Hypotesetesting I

- Ein test er alltid konstruert ut frå føresetnaden at H_0 er rett
- Testkonstruksjonen fører fram til ein
  - **testobservator** (t-testen, F-testen)
- Testobservatoren er konstruert slik at den har ei kjent sannsynsfordeling, ei
  - **Samplingfordeling** (t-fordelinga, F-fordelinga)
- Dersom føresetnaden gir verdiar av observatoren som er lite sannsynlege, har vi liten grunn til å tru at førestenaden er rett

Testen sin p-verdi

- Testen sin p-verdi gir oss det estimerte sannsynet for å observere dei verdiane vi har i utvalet eller verdiar som er enno meir gunstige ut frå teorien om at H_0 er gal dersom utvalet vårt er reint tilfeldig trekt frå ein populasjon det H_0 er rett
- Svært låge p-verdiar gjer at vi ikkje kan tru at H_0 er rett

Hypotesetesting II

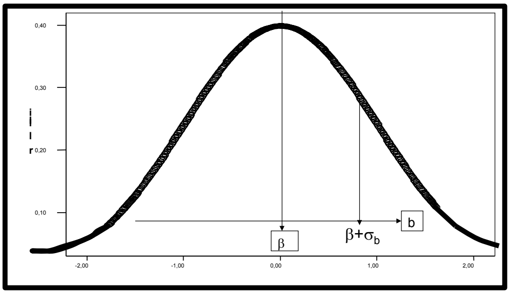
	I røynda er H_0 sann	I røynda er H_0 usann
Vi konkluderer med at H_0 er sann	Metoden gir rett konklusjon med sannsyn $1 - \alpha$	Feil av type II (sannsyn $1 - \beta$)
Vi konkluderer med at H_0 er usann	Feil av type I **Testnivået α** er sannsynet for feil av type I	β = styrken til testen

T-test og F-test

- Kvadratsummar
  - TSS = ESS + RSS
  - RSS = $\Sigma_i(e_i)^2 = \Sigma_i(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ avstand observert – estimert verdi
  - ESS = $\Sigma_i(\hat{Y}_i - \tilde{Y})^2$ avstand estimert verdi – gjennomsnitt
  - TSS = $\Sigma_i(Y_i - \tilde{Y})^2$ avstand observert verdi – gjennomsnitt
- Testobservator
  - **$t = (b - \beta)/ SE_b$** SE = standard error
  - **$F = [ESS/(K-1)]/[RSS/(n-K)]$** K = talet av parametrar

t-test

- Skilnaden mellom observert koeffisient (b_k) og uobservert koeffisient (β_k) standardisert med standardavviket til den observerte koeffisienten (SE_{b_k}) vil normalt vere svært nær null dersom den observerte b_k ligg nær populasjonsverdien (uobservert). Dette tyder at dersom vi i formelen
- $t = (b_k - \beta_k)/ SE_{b_k}$ set inn H_0: $\beta_k = 0$ og finn at ”t” er liten vil vi tru at populasjonsverdien β_k eigentleg er lik 0. Kor stor ”t” må vere for at vi skal slutte å tru at β_k = 0 kan vi finne ut frå kunnskap om samplingfordlingane til b_k og SE_{b_k}



Sampling fordeling for regresjonsprameteren b: **E[b]= β**

Konfidensintervall for β

- Vel ein t_α-verdi frå tabellen over t-fordelinga med n-K fridomsgrader slik at dersom $H_0 : \beta_k = b_k$ er rett vil ein tosidig test ha eit sannsyn på α for å forkaste H_0 når H_0 eigentleg er rett (feil av type I)

  dvs det er eit sannsyn α for at β_k eigentleg ligg utanfor

  $< b_k - t_\alpha(SE_{b_k}) , b_k + t_\alpha(SE_{b_k}) >$
- Dette er det same som at påstanden

  $b_k - t_\alpha(SE_{b_k}) \leq \beta_k \leq b_k + t_\alpha(SE_{b_k})$

  er rett med sannsyn $1 - \alpha$

F-testen: stor mot liten modell

Symbolbruk:

- RSS = residual sum of squares med indeks {*}:
- RSS{K} = RSS i modellen med K parametrar
- RSS{K-H} = RSS i modellen med K-H parametrar
- (H er lik skilnaden i talet på parametrar i to modellar)

Testobservatoren er

$$F_{n-K}^{H} = \frac{\dfrac{RSS\{K-H\}}{H}}{\dfrac{RSS\{K\}}{n-K}}$$

der F_{n-K}^{H} vil vere F-fordelt med H og n-K fridomsgrader

Test av alle parametrane under eitt

- Dersom den store modellen har K parametrar og vi lar den vesle modellen vere så liten som mogeleg med berre 1 parameter (gjennomsnittet) vil testen vår ha H = K-1.
- Set ein inn i formelen ovanfor får vi

$$F_{\{K-1,\ n-K\}} = \frac{ESS/(K-1)}{RSS/(n-K)}$$

Dette er F-verdien vi finn i ANOVA tabellane frå SPSS

Determinasjonskoeffisienten

Determinasjonskoeffisienten:

- R^2 = ESS/TSS = $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$
  - Fortel kor stor del av variasjonen rundt gjennomsnittet vi "forklarer" ved hjelp av variablane vi nyttar i regresjonen ($\hat{Y}_i$ = predikert y)
- I bivariat regresjon er determinasjonskoeffisienten lik korrelasjonskoeffisienten: $r_{yu}^2 = s_{yu} / s_y s_u$
- Kovariansen $s_{yu} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(U_i - \bar{U})$

Om val av uavhengige variablar

- Det er sjeldan eksisterande teori gir oss presise råd om kva for variablar vi skal inkludere i ein modell. Det vil som regel vere eit element av prøving og feiling i arbeidet med å utvikle ein modell.
- Når vi legg til nye variablar skjer fleire ting:
  - Forklaringskrafta aukar: R^2 vert større, men er auken signifikant?
  - Regresjonskoeffisienten viser effekten på y. Er effekten signifikant ulik 0 og så stor at den har substansiell verknad?
  - Spuriøse koeffisientar kan minke. Endrar dei nye variablane tolkinga av dei andre variablane sine effektar?

Parsimonitet

- Parsimonitet er det vi kan kalle eit estetisk kriterium på ein god modell. Vi ønskjer å forklare mest mogeleg av variasjonen i y ved hjelp av færrast mogelege variablar
- Den justerte determinasjonskoeffisienten Adjusted R^2 er basert på parsimonitet i den forstand at den tar omsyn til kompleksiteten i data relativt til modellen gjennom differansen n-K (residualen sine fridomsgrader)
  (n = talet på observasjonar, K = talet på estimerte parametrar)

Irrelevant variabel

- Inkludere ein irrelevant variabel
  - Ein variabel er irrelevant dersom den verkelege effekten (β) ikkje er signifikant ulik 0, eller meir pragmatisk, dersom effekten av variabelen er for liten til å ha substansiell interesse.
  - **Inklusjon av ein irrelevant variabel** gjer modellen unødig kompleks og vil føre til at koeffisientestimata på alle variablane får større varians (varierer meir frå utval til utval)

Relevant variabel

- Ein variabel er relevant dersom den
  1. verkelege effekten (β) er signifikant ulik 0, og stor nok til å ha substansiell interesse og
  2. er **korrelert med andre inkluderte** x-variablar
- Dersom vi **utelet ein relevant variabel** vil alle resultat frå regresjonen verte upålitelege. Modellen er ei urealistisk forenkling.

Utvalsspesifikke resultat?

- Å velje variablar er ei avveging mellom ulike riskar. Kva for ein risk som er verst er avhengig av formålet med studien og styrken i relasjonane.
- Resultata vi finn kan godt vere utvalsspesifikke: i omlag 5% av alle utval vil ein koeffisient som ikkje er signifikant ulik null "eigentleg" vere signifikant ($\beta \neq 0$) (og tilsvarande for dei som er signifikant ulik null)
- Sjansen for å finne slike resultat aukar med talet på variablar som vert testa ("multiple comparison fallacy")

Nominalskalavariable

- Kan inkluderast i regresjonsmodellar ved å lage nye hjelpevariablar: ein for kvar kategori i nominalskalavariabelen
- Dersom vi har ein intervallskala avhengig variabel og ein nominalskala uavhengig variabel vil ein tradisjonelt analysere den ved hjelp av variansanalyse (ANOVA)
- Ved introduksjon av hjelpevariable kan vi utføre same analysane i regresjonsmodellen

Referansekategori (1)

- Dersom den kategoriske variabelen har J kategoriar kan vi maksimalt ta med J-1 hjelpevariablar i regresjonen

  (H(j), j=1, ... , J-1)
- Den utelatne hjelpevariabelen kallar vi referansekategorien

Referansekategori (2)

Referansekategori (den utelatne hjelpevariabelen)

- Ein bør velje ein stor og eintydig definert kategori som referansekategori
- Den estimerte effekten av inkluderte hjelpevariablar måler effekten av å vere i den inkluderte kategorien relativt til å vere i referansekategorien

Interaksjon

- Det er interaksjon mellom to variablar dersom effekten av den eine variabelen varierer etter kva verdi den andre variabelen har.

Interaksjonseffektar i regresjon

- Enkle additive interaksjonseffektar kan vi inkludere i ein lineær modell ved hjelp av produktledd der vi multipliserer to x-variablar med kvarandre
- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 w_i + b_3 x_i w_i$
- Dersom vi foretar ein ikkje-lineær transformasjon av y vil alle estimerte effektar implisitt vere interaksjonseffektar
- Betinga effekt plott vil kunne illustrere kva interaksjon tyder

Modellanalysar bygg på føresetnader

- OLS er ein enkel analyseteknikk med gode teoretiske eigenskapar, men
- Eigenskapane er basert på visse føresetnader
- Dersom føresetnadane ikkje held vil dei gode eigenskapane forvitre
- Å undersøkje i kva grad føresetnadane held er den viktigaste delen av analysen

OLS-REGRESJON: føresetnader

- I SPESIFIKASJONSKRAVET
  - Føresetnaden er at modellen er rett
- II GAUSS-MARKOV KRAVA
  - Sikrar at estimata er "BLUE"
- III NORMALFORDELTE RESTLEDD
  - Sikrar at testane er valide

FØRESETNADER: I Spesifikasjonskravet

- Modellen er rett spesifisert dersom
  - Forventa verdi av y, gitt verdien av dei uavhengige variablane, er ein lineær funksjon av parametrane til x-variablane
  - Alle inkluderte x-variablar påverkar forventa y-verdi
  - Ingen andre variablar påverkar forventa y-verdi samtidig som dei korrelerer med inkluderte x-variablar

FØRESETNADER: II Gauss-Markov krava (i)

(1) x er gitt, dvs. utan stokastisk variasjon

(2) Feila har ein forventa verdi på 0 for alle i

- $E(\varepsilon_i)=0$ for alle i

Gitt (1) og (2) vil ε_i vere uavhengig av x_k for alle k.

Da gir OLS **forventningsrette** estimat av β

(unbiased = forventningsrett)

FØRESETNADER: II Gauss-Markov krava (ii)

(3) Feila har konstant varians for alle i

- $Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$ for alle i

(4) Feila er ukorrelerte med kvarandre

- $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$ for alle $i \neq j$

FØRESETNADER: II Gauss-Markov krava (iii)

Gitt (3) og (4) i tillegg til (1) og (2) får vi

- a. Estimat av standardfeilen til regresjonskoeffisientane er forventningsrette, og
- b. **Gauss-Markov teoremet**:

OLS estimata har **mindre varians** enn alle andre lineære forventningsrette estimat.

OLS gir "BLUE"

(**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimat)

FØRESETNADER: II Gauss-Markov krava (iv)

(1) - (4) kallast GAUSS-MARKOV krava

- Gitt (2) - (4) med tillegg av krav om at feila er ukorrelerte med X variablane (jfr. Hardy s5), dvs.:
  - $\text{cov}(x_{ik}, \varepsilon_i)=0$ for alle i,k

  er koeffisientar og standardfeil **konsistente**

FØRESETNADER: III Normalfordelte restledd

- (5) Dersom alle feila er normalfordelt med forventning 0 og standardavvik på 1, dvs. dersom

  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ for alle i

  - vil ein kunne teste hypotesar om β og σ, og
  - OLS estimata vil ha mindre varians enn estimat frå alle andre forventningsrette estimatorar

OLS gir "BUE"

(Best Unbiased Estimat)

Problem i regresjonsanalysar som ikkje kan testast

- Om alle relevante variablar er med
- Om det er målefeil i x'ane
- Om forventa verdi til feilleddet er 0

  (Dette er det same som at vi ikkje kan sjekke om korrelasjonen mellom feilledd og x-variabel faktisk er 0. Dette er i prinsippet det same som første punkt om at modellen er rett spesifisert)

Problem i regresjonsanalysar som kan oppdagast (1)

- Ikkje-lineære samband
- Inkludert irrelevant variabel
- Ikkje-konstant varians hos feilleddet
- Autokorrelasjon hos feilleddet
- Korrelasjonar mellom feilledd
- Ikkje-normale feilledd
- Multikollinearitet

Konsekvensar av problem (Hamilton, s113)

		Uønska eigenskapar ved estimata			
	Problem	Skeive estimat av b	Skeive estimat av SE_b	Ugyldige t&Ftestar	Høg var[b]
Spesifikasjonskrav	**Ikkje-lineært samband**	X	X	X	-
	Utelaten relevant variabel	X	X	X	-
	Inkludert irrelevant variabel	0	0	0	X
Gauss-Markov krav	**X er målt med feil**	X	X	X	-
	Heteroskedastisitet	0	X	X	X
	Autokorrelasjon	0	X	X	X
	X er korrelert med ε	X	X	X	-
Normalfordeling	**ε er ikkje normalfordelt**	0	0	X	X
Multikollinearitet		0	0	0	X

Problem i regresjonsanalysar som kan oppdagast (2)

- Utliggjarar (ekstreme y-verdiar)
- Innverknad (case med stor innverknad: uvanlege kombinasjonar av y og x-verdiar)
- Leverage (potensiale for innverknad)

Hjelpemiddel

- Studiar av
  - Einvariabel fordelingar (frekvens fordeling og histogram)
  - Tovariabel samvariasjon (korrelasjon og spreiingsplott)
  - Residualen (fordeling og i samvariasjon med predikert verdi)

Heteroskedastisitet (ikkje-konstant varians hos feilleddet) kan skuldast

- Målefeil (t.d. y meir nøyaktig ved større x)
- Utliggarar
- At ε_i inneheld eit viktig ledd som varierer saman med x og y (spesifikasjonsfeil)
- Spesifikasjonsfeil er det same som feil modell og gir heteroskedastisitet
- Eit viktig diagnoseverktøy er plott av residual mot predikert verdi ($\hat{y}$)

Autokorrelasjon (1)

- Korrelasjon mellom variabelverdiar på same variabel over ulike case

  (t.d. mellom ε_i og ε_{i-1})
- Autokorrelasjon gir større varians og skeive estimat av standardfeil slik som heteroskedastisitet
- Når vi har enkelt tilfeldig utval frå ein populasjon, er autokorrelasjon usannsynleg

Autokorrelasjon (2)

- Autokorrelasjon kjem frå feilspesifikasjon av modellen
- Ein finn det typisk i tidsseriar og ved geografisk ordna case
- Testar (t.d. Durbin-Watson) er basert på sorteringsrekkefølgja av casa. Derfor:
- Ei hypotese om autokorrelasjon må spesifisere korleis casa skal sorterast

Durbin-Watson testen (1)

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2}}$$

Bør ikkje nyttast for autoregressive modellar, dvs. modellar der y-variabelen også finst som forklaringsvariabel (x-variabel) jf. tabell 3.2

Durbin-Watson testen (2)

- Samplingfordelinga til d-observatoren er kjent og tabellert som $\mathbf{d_L}$ og $\mathbf{d_U}$ (tabell A4.4 i Hamilton), talet av fridomsgrader baserer seg på n og K-1
- Testregel:
  - Forkast dersom $d<d_L$
  - Forkast ikkje dersom $d>d_U$
  - Dersom $d_L < d < d_U$ kan det ikkje konkluderast
- d=2 tyder ukorrelerte residualar
- Positiv autokorrelasjon gir d<2
- Negativ autokorrelasjon gir d>2

Konsekvensar av autokorrelasjon

- Hypotesetestar og konfidensintervall er upålitelege. Regresjon kan likevel gi ei god skildring av utvalet. Parametrane er forventningsrette

Kva kan gjerast meir?

- Spesialprogram kan estimere standardfeil konsistent
- Ta inn i analysen variablar som påverkar "hosliggjande" case
- Ta i bruk teknikkar frå tidsserieanalyse (t.d.: analyser differansen mellom to tidspunkt) (Δy)

Ikkje-normale residualar

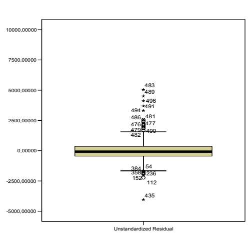
Gjer at vi ikkje kan nytte t- og F-testar

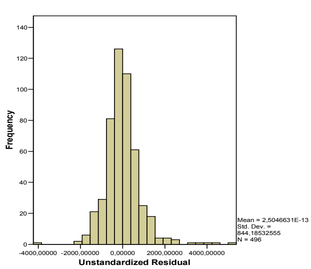
- Sidan OLS estimata av parametrane er lett påverkeleg av utliggjarar vil tunge halar i fordelinga av feila indikere stor variasjon i estimata frå utval til utval
- Vi kan sjekke føresetnaden om normalfordeling gjennom å sjå på fordelinga av residualen
  - Histogram, boksplott eller kvantil-normal plott

Diagram av residualen viser:

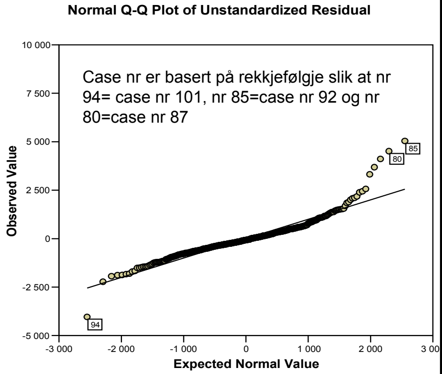
Tunge halar, mange utliggarar og svakt positiv skeiv fordeling

BOKSPLOTT HISTOGRAM





Kvantil-Normal plott av residual frå regresjon i tabell 3.2 i Hamilton



Tiltak ved ikkje-normalitet

- Sjekk om vi har funne rette funksjonsforma
- Sjekk om vi har utelate ein viktig variabel
  - Dersom vi ikkje kan forbetre modellen substansielt kan vi freiste å transformere den avhengige variabelen så den blir symmetrisk
- Sjekk om manglande normalitet skuldast utliggjarar eller påverknadsrike case
  - Dersom vi har utliggjarar kan transformasjon hjelpe

Påverknad (1)

- Eit case (eller ein observasjon) har påverknad dersom regresjonsresultatet endrar seg når case blir utelate
- Somme case har uvanleg stor påverknad på grunn av
  - Uvanleg stor y-verdi (utliggjar)
  - Uvanleg stor verdi på ein x-variabel
  - Uvanlege kombinasjonar av variabelverdiar

Påverknad (2)

- Vi ser om eit case har påverknad ved å samanlikne regresjonar med og utan eit bestemt case. Ein kan t.d.
- Sjå på skilnaden mellom b_k og $b_{k(i)}$ der case nr i er utelate i estimeringa av den siste koeffisienten.
- Denne skilnaden målt relativt til standardfeilen til $b_{k(i)}$ vert kalla DFBETAS_{ik}

DFBETAS_{ik}

$$DFBETAS_{ik} = \frac{b_k - b_{k(i)}}{\dfrac{s_{e(i)}}{\sqrt{RSS_k}}}$$

$s_{e(i)}$ er residualen sitt standardavvik når case nr i er utelate frå regresjonen

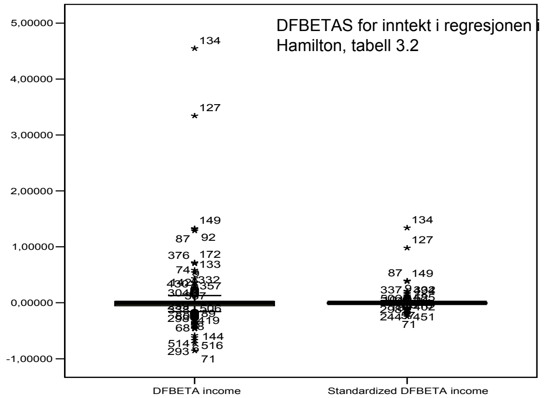
RSS_k er Residual Sum of Squares frå regresjonen av x_k på alle dei andre x-variablane

Kva er ein stor DFBETAS?

- DFBETAS_{ik} vert rekna ut for kvar uavhengig variabel og kvart einaste case. Vi kan ikkje inspisere alle verdiane
- Tre kriterium for å finne dei store verdiane vi treng sjå på (ingen av dei treng vere problematiske)
  - Ekstern skalering: $|\text{DFBETAS}_{ik}| > 2/\sqrt{n}$
  - Intern skalering:

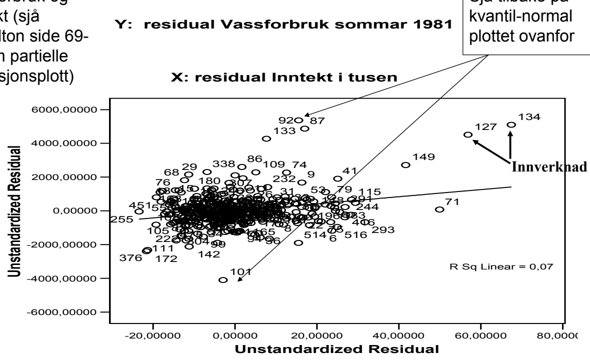
    $Q_1 - 1.5\text{IQR} < |\text{DFBETAS}_{ik}| < Q_3 + 1.5\text{IQR}$

    (alvorleg utliggjar i boksplott av DFBETAS_{ik})
  - Gap i fordelinga av DFBETAS_{ik}



Leverage plott for vassforbruk og inntekt (sjå Hamilton side 69-72 om partielle regresjonsplott)

Stor residual: Sjå tilbake på kvantil-normal plottet ovanfor



Konsekvensar av case med stor påverknad

- Om vi oppdagar påverknadsrike case skal vi ikkje nødvendigvis ta dei ut av analysen
- Rapporter resultat med og utan casa
- Sjekk påverknadsrike case nøye, kanskje er der målefeil
- Når påverknadsrike case er utliggjarar kan ein minske innverknaden ved transformasjon
- Bruk robust regresjon som ikkje er så lett påverkeleg som OLS regresjon

Potensiell påverknad: leverage

- Den samla påverknaden frå ein bestemt kombinasjon av x-verdiar på eit case måler vi med h_i "hatt-observatoren"
- h_i varierer frå 1/n til 1. Den har eit gjennomsnitt på K/n (K = # parametrar)
- SPSS rapporterer den sentrerte h_i dvs. $(h_i – K/n)$, vi kan kalle denne for h^c_i

Total påverknad: Cook's D_i

- Cook's distanse D_i måler påverknad på heile modellen, ikkje på dei einskilde koeffisientane slik som $DFBETAS_{ik}$

$$D_i = \frac{z_i^2 h_i}{K\left(1-h_i\right)}$$

der z_i er den standardiserte residualen

og h_i er hatt observatoren (leverage)

Kva er ein stor D_i ?

- Det kan vere verd å sjå på alle
  - $D_i > 1$ alternativt
  - $D_i > 4/n$
- Sjølv om eit case har låg D_i kan det likevel vere slik at det verkar inn på storleiken til einskildkoeffisientar (har stor $DFBETAS_{ik}$)

Påverknad: Oppsummering

Kva kan gjerast med utliggjarar og case med stor påverknad? Vi kan

- undersøkje om det er feil i data. Ved feil i data kan case fjernast frå analysen
- undersøkje om transformasjon til symmetri hjelper
- rapportere to likningar: med og utan casa som påverkar urimeleg mye
- skaffe meir data

Multikollinearitet (1)

- Multikollinearitet involverer berre x-variablane, ikkje y, og dreiar seg om lineære samband mellom to eller fleir x-variablar
- Dersom det er perfekt korrelasjon mellom to forklaringsvariablar t.d. x og w (dvs. $r_{xw} = 1$) vil den multiple regresjonsmodellen bryte saman
- Tilsvarande skjer dersom der er perfekt korrelasjon mellom to grupper av forklaringsvariable

Multikollinearitet (2)

- Perfekt multikollinearitet er svært sjeldan eit praktisk problem
- Men høge korrelasjonar mellom ulike x-variablar eller ulike grupper av x-variablar vil gjere at estimata av effekten deira blir svært usikker. Dvs. regresjonskoeffisienten vil ha svært stor standardfeil og t-testane blir i praksis uinteressante
- F-testen av ei gruppe variablar er ikkje påverka

Multikollinearitet (3)

- Når modellen omfattar kurvelineære element eller interaksjonsledd vil vi også introdusere eit visst element av multikollinearitet. Vi kan ikkje stole på testane av einskildkoeffisientar.
- Vi kan ikkje fjerne slike element utan fare for å droppe ein relevant variabel
- F-test av t.d. w og z*w under eitt unngår testproblemet (stor varians på einskildparameter), og litt eksperimentering med ulike modellar vi vise om utelating av w eller x*w endrar samanhengane substansielt

Toleranse

- Mengda av variasjon i ein variabel x_k som er unik for variabelen vert kalla toleransen til variabelen
- La R^2_k vere determinasjonskoeffisienten i regresjonen av x_k på dei andre x-variablane. Dei andre x-variablane forklarer R^2_k av variasjonen i x_k.
- Da er 1- R^2_k den unike variasjonen, dvs. Toleransen = 1- R^2_k
- Ved perfekt multikollinearitet vil R^2_k = 1 og toleransen = 0
- Låge verdiar av toleransen gjer regresjonsresultata mindre presise (større standardfeil)

Kva er for låg toleranse?

Når R^2_k > 0,9 er toleransen < 0,1 og VIF > 10

Multiplikatoren for standardfeilen er da kvadratrota av VIF (ca 3.2)

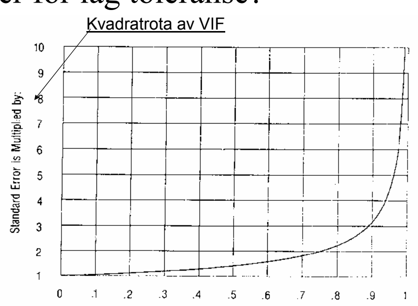


Figure 4.15 Effect of multicollinearity on standard errors (simplified).

Indikatorar for multikollinearitet

- sjekk korrelasjonar mellom parameterestimat
- sjekk om toleransen (den delen av variasjonen i x som ikkje er felles med andre variablar) er mindre enn t.d. 0,1
- VIF= variansinflasjonsfaktor= 1/toleranse

Når er multikollinearitet eit problem?

- Det er ikkje eit problem dersom årsaka er kurvelinearitet eller interaksjonsledd i modellen. Men vi må i testinga ta omsyn til at parameterestimat for variablar med høg VIF er upresise. Vi testar dei som gruppe med F-testen
- Det er ikkje eit problem når det skuldast at to variablar måler same omgrep. Då kan den eine droppast eller dei kan kombinerast til ein indeks.
- Det er eit problem dersom vi treng estimat av variablane sine separate effektar (når kunnskap om deira samla effekt ikkje er nok)

OLS regresjon: Oppsummering (1)

- Når vi har normalfordelte og identisk uavhengig feil er OLS estimata betre eller like gode som andre mogelege estimat
- Men føresetnadene er sjeldan oppfylt fullt ut, vi må sjekke i kva grad dei er oppfylt
- Mange problem kan rettast opp dersom vi veit om dei
- Sjekk tidleg om det er problem med kurvelinearitet, utliggjarar eller heteroskedastisitet (t.d. gjennom spreiingsdiagram)

OLS regresjon: Oppsummering (2)

- Gjer meir nøyaktige granskingar gjennom residualplott og leverage plott
  - Kurvelinearitet (leverage plott, residual mot predikert Y plott)
  - Heteroskedastisitet (leverage plott, [absolutt verdi av residual] mot predikert Y plott)
  - Ikkje-normale residualar (kvantil-normal plott, box-plott med analyse av median og IQR/1.35)
  - Påverknad (sjekk DFBETAS og Cook's D)
- Når vi ikkje kan oppdage alvorlege problem vil vi ha større tiltru til konklusjonane

Manglande Data

Data manglar av mange grunnar

- Personar nektar å svar
- Personar gløymer eller overser nokre spørsmål
- Personar veit ikkje noko svar
- Spørsmålet er irrelevant
- I administrative register kan somme dokument ha gått tapt
- I forskingsdesign for vanskeleg målbare variablar

Manglande data fører til problem

- Det er eit praktisk problem sidan alle statistiske prosedyrar føreset fullstendige datamatriser
- Det er eit analytisk problem sidan manglande data som regel gir skeive estimat av parametrane
- Det er eit viktig skilje mellom data som manglar av tilfeldige årsaker og dei som manglar av systematiske årsaker

Den enkle løysinga: fjern alle case med manglande data

- Listevis (Listwise/ casewise) fjerning av manglande data tyder at ein fjernar alle case som manglar data på ein eller fleire variablar inkludert i modellen
- Metoden har gode eigenskapar, men kan i somme høve ta ut av analysen mesteparten av casa
- Vanlege alternativ, som parvis (”pairwise”) fjerning, har vist seg å vere dårlegare
- Nyare metodar som ”maximum likelihood” og ”multiple imputation” har betre eigenskapar men er krevjande
- Det løner seg å gjere god arbeid i datainnsamlinga

Konvensjonelle metodar

Vanlege metodar ved MAR (missing at random) data:

- Listevis utelating (Listwise deletion)
- Parvis utelating (Pairwise deletion)
- Dummy variabel korreksjon
- Innsetjing av verdi (Imputation)

Ingen av dei vanleg brukte metodane er tydeleg betre enn listevis utelating. Bruk dei ikkje!

Listevis utelating (1)

- Kan alltid nyttast
- Dersom data er MCAR gir det eit enkelt tilfeldig utval av det opphavelege utvalet
- Mindre n gir sjølvsagt større variansestimat
- Også når data er MAR og missing på x-variablar er uavhengig av verdien på y vil listevis utelating gi forventingsrette estimat

Listevis utelating (2)

- I logistisk regresjon er listevis utelating problematisk berre dersom missing er relatert både til avhengig og uavhengige variablar
- Når missing berre er avhengig av den uavhengige variabelen sine eigne verdiar er listevis betre enn maximum likelihood og multiple imputation

Oppsummering om konvensjonelle metodar for manglande data

- Vanlege metodar utanom listevis utelating for korreksjon av manglande data gjer problema verre
- Ver nøye med datainnsamlinga slik at det er eit minimum av manglande data
- Prøv å samle inn data som kan hjelpe til med å modellere prosessen som fører til missing
- Der data manglar **bruk listevis utelating** dersom ikkje maximum likelihood eller multiple imputasjon er tilgjengeleg

Nye metodar for ignorerbare manglande data (MAR data): Maximum Likelihood (ML)

- Konklusjonar
  - Baserer seg på sannsynet for å observere nett dei variabelverdiane vi har funne i utvalet
  - ML gir optimale parameterestimat i store utval når data er MAR
  - Men ML krev ein modell for den felles fordelinga av alle variablane i utvalet som manglar data, og den er vanskeleg å bruke for mange typar modellar

Nye metodar for ignorerbare manglande data (MAR data): Multippel Imputasjon (MI)

- Konklusjonar
  - Baserer seg på ein tilfeldig komponent som vert lagt til estimat av dei einskilde manglande opplysningane
  - Har like gode eigenskapar som ML og er enklare å implementere for alle slags modellar.
  - Men den gir ulike resultat for kvar gong den blir brukt

Data som manglar systematisk

- Krev som regel ein modell av korleis fråfallet oppstår
- ML og MI tilnærmingane kan framleis nyttast, men med mye strengare restriksjonar og resultata er svært sensitive for brot på føresetnadene

Manglande data: Oppsummering

- Dersom nok data vert igjen er listevis utelating den enklaste løysinga
- Dersom listevis utelating ikkje fungerer bør ein freiste med multippel imputasjon
- Dersom ein har mistanke om at data ikkje er MAR må ein lage ein modell for prosessen som skaper missing. Denne kan eventuelt nyttast saman med ML eller MI. Gode resultat krev at modellen for missing er korrekt

Kurvetilpassing

- Ein rett spesifisert modell krev at funksjonen som bind x-variablane og y variabelen saman er i samsvar med røyndomen: er sambandet lineært?
- Data kan granskast gjennom bandregresjon eller glatting
- Teori om kausalsambandet kan spesifisere eit ikkje-lineært samband
- For fenomen som ikkje kan representerast med ei rett linje har vi alternativa
  - Kurvelineær regresjon
  - Ikkje-lineær regresjon

Transformerte variablar

- Brukar vi transformerte variablar vert regresjonen kurvelineær. Transformasjonen gjer den opphavelege kurvesamanhengen til ein lineær samanheng
- Dette er den viktigaste grunnen til å transformere.
- Samtidig kan transformering ordne opp i ulike typar statistiske problem (utliggjarar, heteroskedastisitet, ikkje-normale feil)

Den lineære modellen

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K-1} \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i$$

- I den lineære modellen kan vi transformere x-ane og y-ane utan at det har noko å seie for eigenskapane til OLS estimata i seg sjølv.
- Så lenge modellen er lineær i parametrane er OLS ein lovleg metode

Val av transformasjon

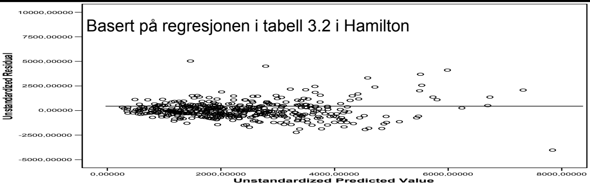
- Spreiingsplott eller teori kan gi råd
- Elles er transformasjon til symmetri det beste utgangspunktet
- Regresjonen rapportert i tabell 3.2 i Hamilton viste seg problematisk
- Regresjon med transformerte variablar kan redusere problema

Val av transformasjon i tab. 3.2 Hamilton

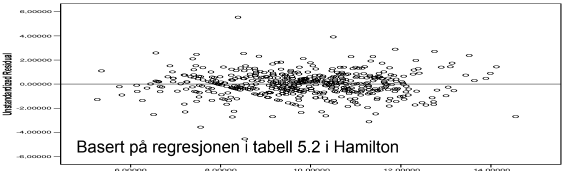
Y	$Y^*=Y^{0.3}$ gir tilnærma symmetri	Vassforbruk 1981
X_1	$X_1^*= X_1^{0.3}$ gir tilnærma symmetri	Inntekt
X_2	$X_2^*= X_2^{0.3}$ gir tilnærma symmetri	Vassforbruk 1980
X_3	Transformasjonar kan gjere lite	Utdanning
X_4	Transformasjon påverkar ikkje dummyvariable	Pensjonist
X_5	$X_5^*= \ln(X_5)$ gir tilnærma symmetri	# menneskje i 1981
X_6	$X_6 = X_5 - X_0$ (= # menneskje i 1980)	Endring i # menneskje
X_7	$X_7^* = \ln (X_5/X_0)$	Relativ endring i # m

Regresjon med transformerte variable Tab 5.2 Hamilton

Dependent Variable: wtr81_3	B	Std. Error	t	Sig.
(Constant)	1,856	,385	4,822	,000
inc_3	,516	,130	3,976	,000
wtr80_3	,626	,029	21,508	,000
Education in Years	-,036	,016	-2,257	,024
head of house retired?	,101	,119	,852	,395
logpeop	,715	,110	6,469	,000
clogpeop	,916	,263	3,485	,001



Residual mot predikert Y



Andre verknader av transformasjonane

- To case med stor innverknad på koeffisienten for inntekt (store DFBTAS) har no ikkje slik innverknad (fig. 4.11 og 5.9)
- Eit case med stor innverknad på koeffisienten for vassforbruk i 1980 har no ikkje så stor innverknad (fig. 4.12 og 5.10)
- Transformasjonar som gjer fordelingar symmetriske vil ofte løyse mange problem – men ikkje alltid!

Tolking

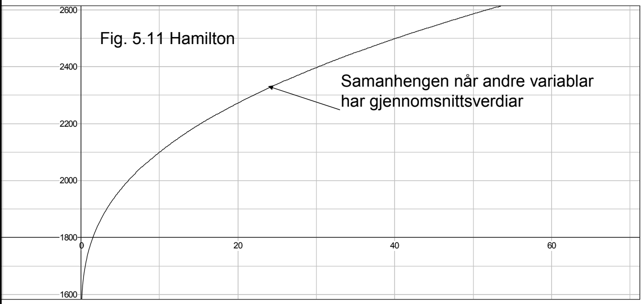
- Estimatet av modellen ser no slik ut

$$y_i^{0.3} = 1.856 + 0.516 x_{1i}^{0.3} + 0.626 x_{2i}^{0.3} - 0.036 x_{3i}$$

$$+0.101 x_{4i} + 0.715 \ln(x_{5i}) + 0.916 \ln(\frac{x_{5i}}{x_{0i}})$$

- Tolking av koeffisientane er ikkje lenger så enkelt (t.d.: måleeiningane på parametrane er endra)
- Den enklaste måten å tolke på er å nytte betinga effekt plott

Vassforbruk etter inntekt kontrollert for andre variablar



$y^{0.3}$=1.856+0.626(2732)$^{0.3}$-0.036(14)+0.101(0.294)+0.715ln(3.07)+0.916(ln(3.07)-ln(3.11))+0.516(x)$^{0.3}$

Kva er interessant å plotte?

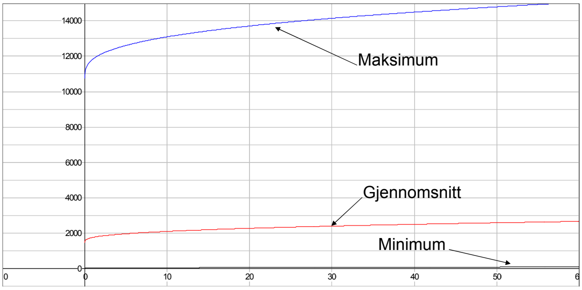
- Samanhengen inntekt vassforbruk kontrollert for ulike kombinasjonar av andre variabelverdiar
  1. Dei som minimerer vassforbruket
  2. Dei som maksimerer vassforbruket
  3. Gjennomsnittverdiane

1 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(200)$^{0.3}$-0.036(20)+0.101(0)+0.715ln(1)+0.916(ln(1)-ln(10))+0.516(x)$^{0.3}$)

2 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(12700)$^{0.3}$-0.036(6)+0.101(1)+0.715ln(10)+0.916(ln(10)-ln(1))+0.516(x)$^{0.3}$)

3 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(2732)$^{0.3}$-0.036(14)+0.101(0.29)+0.715ln(3.07)+0.916(ln(3.07)-ln(3.11))+0.516(x)$^{0.3}$)

Samanlikning av tre typar brukssituasjon



Samanhengen mellom inntekt og vassforbruk Fig. 5.12 Hamilton

Konstanten si rolle i plottet

- Den einaste skilnaden mellom dei tre kurvene er konstanten
  - I maksimumskurva er (konst) = 14.046
  - I minimumskurva er (konst) = 4.204
  - I gjennomsnittskurva er (konst) = 8.507

$$y_i^{0.3} = \left(konst\right) + 0.516 x_{1i}^{0.3}$$

- Effekten av inntekt varierer med verdien av (konst), dvs. verdien av dei andre variablane
- Når vi transformerer avhengig variabel vert **alle** samanhengar til interaksjonseffektar

Samanlikning av effektar

- I somme samanhengar kan ein nytte den standardiserte regresjonskoeffisienten til å samanlikne effektar, men den er sensitiv for skeive estimat av standardfeilen
- Ein meir generell metode er å samanlikne betinga effekt plott der skaleringa på y-aksen er halden konstant

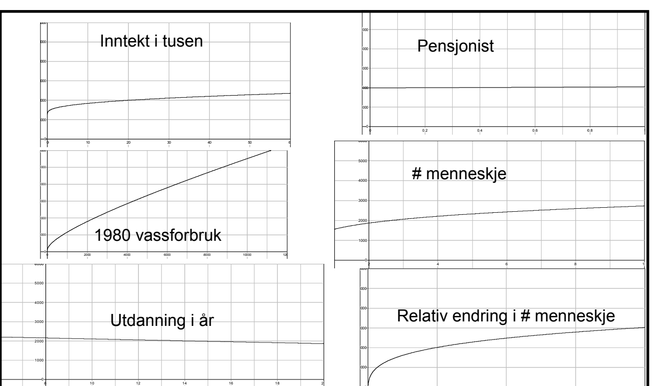


Fig. 5.13 Hamilton

Ikkje-lineære modellar

- Dersom vi ikkje har modellar som er lineære i parametrane vil ein trenge andre teknikkar for å estimere parametrane
- Det kan vere to typar argument for slike modellar
  - Teori om den kausale mekanismen kan diktere ein slik modell
  - Inspeksjon av data kan peike på ein bestemt type modell

Logistiske modellar

- Den logistiske funksjonen skriv ein

$$y = \frac{\alpha}{1 + \gamma \exp(-\beta x)} + \varepsilon$$

- Når x veks mot uendeleg vil y nærme seg α
- Når x minkar mot minus uendeleg vil y nærme seg 0

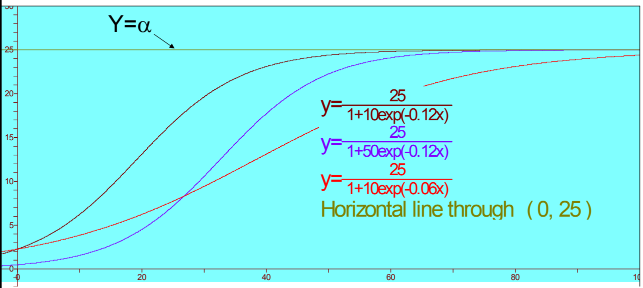
- Logistiske modellar passar til mange fenomen
  - Vekst i biologiske populasjonar
  - Spreiing av rykte
  - Spreiing av sjukdom

Logistiske modellar: parametertolking

- γ fastset kvar veksten startar,
- β avgjer kor rask veksten er,

- Skifte av forteikn i eksponenten (dersom eksponenten er $+\beta x$) vil y minke med aukande x

Logistiske kurver Fig. 5.17 Hamilton



Logistisk sannsynsmodell

- Dersom ein set α=γ=1 vil y variere mellom 0 og 1 når x varierer mellom minus uendeleg og pluss uendeleg.
- Logistiske kurver kan da nyttast til å modellere sannsyn

$$y_i = \frac{1}{1+\exp\left(-\beta x_i\right)} + \varepsilon_\iota$$

Estimering av ikkje-lineære modellar

- Kriteriet på tilpassing er framleis minimum RSS
- Ein kan sjeldan finne analytiske uttrykk for parametrane. Ein må gjette på ein startverdi og gå igjennom fleire iterasjonar for å finne kva parameterverdi som gir den minste RSS verdien
- Gode startverdiar er som regel nødvendig og alt frå teori til inspeksjon av data vert brukt for å finne dei

Konklusjonar (1)

- Dataanalyse startar ofte med lineære modellar. Dei er enklast.
- Teori eller utforskande dataanalyse (bandregresjon, glatting) kan seie oss om kurvelineære eller ikkje-lineære modellar trengst
- Transformasjon av variable gir kurvelineær regresjon. Dette kan motverke fleire problem
  - Kurvelinearitet i samanhengane
  - Case med stor påverknad
  - Ikkje-normale feil
  - Heteroskedastisitet

Konklusjonar (2)

- Ikkje-lineær regresjon nyttar iterative prosedyrar for å finne parameterestimat.
- Prosedyrane treng initialverdiar og er ofte sensitive for initialverdiane.
- Tolking av parametrar kan vere vanskeleg. Grafar som viser sambanda for ulike parameterverdiar vil hjelpe mye

Robust Regresjon

- Er utvikla for å fungere godt i situasjonar der OLS regresjonen bryt saman. Der OLS føresetnadene er oppfylt gir robust regresjon dårlegare resultat enn OLS, men ikkje mye
- Sjølv om robust regresjon høver betre for den som ikkje vil leggje mye arbeid i å teste føresetnader er metodane førebels vanskelege å gjere seg bruk av
- Robust regresjon har fokusert mest på fordelingar av residualar med tunge halar (mange case med stor innverknad på regresjonen)

Utliggjarar er eit problem for OLS

Utliggjarar verkar inn på estimat av

- Parametrar
- Standardfeil (standardavvik til parameter)
- Determinasjonskoeffisienten
- Testobservatorar
- Og mange andre observatorar

Robust regresjon freistar verne mot dette ved å gi mindre vekt til slike case,
<u>ikkje ved å ekskludere dei</u>

Hjelp mot IKKJE-NORMALE residualar

Robuste metodar kan vere til hjelp når

- Halane i residualfordelinga er "tunge" dvs. når det er "for mange" utliggjarar i høve til normalfordelinga
- Uvanlege X-verdiar gir påverknad (leverage) problem

Ved andre årsaker til ikkje-normalitet hjelper dei ikkje.

Estimeringsmetodar for robust regresjon

- M-estimering (maximum likelihood) minimerer ein <u>vekta sum av residualane</u>. Kan tilnærmast med vekta minste kvadrat metoden (WLS)
- R-estimering (basert på rang) minimerer ein <u>sum der ein vekta rang</u> inngår. Metoden er vanskelegare å bruke enn M-estimeringa
- L-estimering (basert på kvantilar) brukar lineære funksjonar av utvalsordningsobservatorane (kvantilane)

IRLS - Iterativt Revekta Minste Kvadrat

M-estimat ved hjelp av IRLS treng

1. Startverdiar frå OLS. Ta vare på residualane.
2. Bruk OLS residualane til å finne vekter. Til større residual, til mindre vekt
3. Finn nye parameterverdiar og residualar med WLS
4. Gå til 2 og finn nye vekter frå dei nye residualane, fortsett til steg 3 og 4, heilt til endringane i parametrane vert små

Iterasjon: å gjenta ein sekvens av operasjonar

IRLS

- IRLS er i teorien ekvivalent med M-estimering
- For å nytte metoden treng vi å rekne ut
- Skalerte residualar, u_i , og ein
- Vektfunksjon, w_i , som gir minst vekt til dei største residualane

Vektfunksjonar I

- Eigenskapane vert målt i høve til OLS på normalfordelte feil. Metoden skal vere "nesten like god" som OLS ved normalfordelte feil og mye betre når feila er ikkje-normale
- Eigenskapane vert fastlagt ved ein "kalibreringskonstant" (c, i formlane)

Vektfunksjonar II

- **OLS vekter**: $w_i = 1$ for alle i
- **Huber vekter**: vektar ned når den skalerte residualen er større enn c, c=1,345 gir 95% av OLS sin effektivitet på normalfordelte feil
- **Tukey's bivekta** estimat får 95% av OLS sin effektivitet på normalfordelte feil ved gradvis nedvekting av skalerte feil opp til $|u_i| \leq c = 4.685$ og ved å droppe case der residualen er større.

Bruk av Robust Estimering

- Dersom OLS estimat og Robuste estimat er ulike tyder det at utliggjarar verka inn på OLS slik at vi ikkje kan stole på resultata
- Robuste predikerte verdiar reflekterer betre hovudmassen av data
- Robuste residualar vil derfor betre avsløre kva som er uvanlege case
- Vektene frå den robuste regresjonen vil vise kva for case som er utliggjarar
- OLS og RR kan stø kvarandre

RR vernar ikkje mot leverage

- RR med M-estimering vernar mot uvanlege y-verdiar (utliggjarar) men ikkje nødvendigvis mot uvanlege x-verdiar (leverage)
- Innsats på testing og diagnose trengst framleis (heteroskedastisitet er t.d. problematisk ved IRLS)
- Studiar av datamaterialet og symmetri-transformasjon reduserer sjansen for at problem dukkar opp
- Ingen metode er "trygg" om den blir brukt utan omtanke og studiar av data

BI (bounded influence) - Avgrensa påverknad regresjon

- BI-metodane er laga for å avgrense verknaden av stort potensiale for påverknad (stor h_i - leverage)
- Den aller enklaste tilnærminga til problemet er å modifisere Huber vektene eller Tukey vektene med ein faktor basert på leverage observatoren

Avgrensa påverknad: vektmodifikasjon

- Vi utvidar vektfunksjonen med ei vekt basert på innverknad (leverage) observatoren h_i

Påverknadsfaktoren i vektinga kan t.d. setjast til

- $w^H_i = 1$ dersom $h_i \le c^H$
- $w^H_i = (c^H / h_i)$ dersom $h_i > c^H$
- c^H vert ofte sett lik 90% percentilen i fordelinga av h_i
- IRSL vekta vert da $w_i w^H_i$ der w_i er enten Tukey eller Huber vekter som endrar seg frå iterasjon til iterasjon medan w^H_i er konstant

Konklusjonar

- Når data har mange utliggjarar vil robuste metodar ha betre eigenskapar enn OLS.
  - Dei er meir effektive og gir meir nøyaktige konfidensintervall og testar
- Robust regresjon kan brukast som diagnoseverktøy.
  - Er OLS og RR einige kan vi ha større tiltru til OLS resultata
  - Er dei ueinige vil vi
    - Vere merksame på at eit problem eksisterer
    - Ha ein modell som passar betre med data og identifiserer utliggjarar betre
- Robuste metodar verkar ikkje mot problem som skuldast kurvelineære eller ikkje-lineære modellar, heteroskedastisitet og autokorrelasjon

LOGISTISK (LOGIT) REGRESJON

- **Skal nyttast når avhengig variabel er på nominalnivå**
- Den enklaste modellen føreset at Y har verdiane 0 eller 1
- Modellen av den betinga forventninga til Y, E[Y | X], nyttar den logistiske funksjonen
- Men kvifor kan ikkje E[Y | X] vere ein lineær funksjon også her?

Den lineære sannsynsmodellen: LPM

- Den lineære sannsynsmodellen (LPM) brukt på Y_i når Y_i berre kan ta to verdiar (0,1) føreset at vi kan tolke $E[Y_i \mid \mathbf{X}]$ som eit sannsyn
- $E[Y_i \mid \mathbf{X}] = b_0 + \Sigma_j b_j x_{ji} = \Pr[Y_i = 1]$
- Dette fører til problem

Er føresetnadene rette i LPM?

- Ein føresetnad i LPM er at residualen e_i stettar krava til OLS
- Residualen er anten $e_i = 1 - (b_0 + \Sigma_j b_j x_{ji})$ eller $e_i = 0 - (b_0 + \Sigma_j b_j x_{ji})$
- Dette tyder heteroskedastisitet (residualen varierer med storleiken på x-variablane)
- Det finst estimeringsmetodar som kan komme rundt dette problemet (2-stegs vekta minste kvadrats metode til dømes)

LPM er feil modell

- Eit anna problem, at ein for rimelege verdiar av x-ane kan får ein verdi av predikert y der $E[Y_i \mid \mathbf{X}] > 1$ eller $E[Y_i \mid \mathbf{X}] < 0$, kan ein ikkje gjere noko med
- LPM er substansielt sett feil modell
- Det trengst ein modell der ein alltid har $0 < E[Y_i \mid \mathbf{X}] < 1$

Oddsen: definisjon

Definisjonar

- Sannsynet for at person i skal ha verdien 1 på variabelen Y skriv vi $\Pr(Y_i=1)$. Da er $\Pr(Y_i \text{ ulik } 1) = 1 - \Pr(Y_i=1)$
- Oddsen for at person i skal ha verdien 1 på variabelen Y_i, her kalla O_i , er tilhøvet mellom dei to sannsyna

$$O_i\left(y_i = 1\right) = \frac{\Pr\left(y_i = 1\right)}{1 - \Pr\left(y_i = 1\right)} = \frac{p_i}{1 - p_i}$$

Logiten: definisjon

- LOGITEN , L_i , er den naturlege logaritmen til oddsen, O_i , for person i:
  $L_i = \ln(O_i)$
- Modellen føreset at L_i er ein lineær funksjon av forklaringsvariablane x_j , dvs:
- $L_i = \beta_0 + \Sigma_j \beta_j x_{ji}$, der j=1,...,K-1, og i=1,...,n

Modellen av sannsynet

- Sett **X** = (samlinga av alle x_j), da er sannsynet for at $Y_i = 1$ for person nr i

$$\Pr(y_i = 1) = E\left[y_i \mid x\right] = \frac{1}{1 + \exp\left(-L_i\right)} = \frac{\exp(L_i)}{1 + \exp(L_i)}$$

der $L_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K-1} \beta_j X_{ji}$

Grafen til dette sambandet er nyttig for tolkinga av kva ei endring i x tyder

LOGISTISK REGRESJON: Estimering

- Metoden brukt for å estimere parametrane i modellen er Maximum Likelihood
- ML-metoden gir oss dei parametrane som maksimerer sannsynet (Likelihood) for å finne dei observasjonane vi faktisk har
- Dette sannsynet skal vi kalle $\mathcal{L}$

Likelihood: definisjon

- Likelihooden er lik produktet av sannsynet for kvar einskild observasjon. For ein dikotom variabel der $\Pr(Y_i = 1)=P_i$ kan dette skrivast

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} \left\{ P_i^{Y_i} \left(1 - P_i\right)^{(1-Y_i)} \right\}$$

LogLikelihood: definisjon

- For lettare å kunne maksimere likelihooden, $\mathcal{L}$, tar ein den naturlege logaritmen til $\mathcal{L}$:

$$\ln\left(\mathcal{L}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i \ln P_i+\left(1-y_i\right)\ln\left(1-P_i\right)\right\}$$

- Den naturlege logaritmen til $\mathcal{L}$ kallar vi LogLikelihooden, eller $\mathcal{LL}$
- $\mathcal{LL}$ har ei sentral rolle i logistisk regresjon

Maksimering av LogLikelihood

- **LogLikelihooden = $\mathcal{LL}$ = ln($\mathcal{L}$) = $\log_e$($\mathcal{L}$) =**
$\Sigma_i \{Y_i \log_e P_i + (1-Y_i)\log_e(1-P_i)\}$, i= 1, 2, 3, ... , n,

- $\mathcal{LL}$ er alltid negativ. Maksimering av $\mathcal{LL}$ er derfor likeverdig med minimering av den positive LogLikelihooden (dvs. -$\mathcal{LL}$)

Iterativ estimering

Estimeringa vart avslutta ved iterasjon nr 4 sidan parameterestimata endra seg med mindre enn 0,001.

Utdrag frå Hamilton Tabell 7.1	Iteration	-2 Log Likelihood	Coefficients	
			Constant	lived
Initial	0	209,212	-,276	
Step	1	195,684	,376	-,034
	2	195,269	,455	-,041
	3	195,267	,460	-,041
	4	195,267	,460	-,041

Iterasjon 0: Utgangspunktet er ein modell med berre konstantledd

Testobservatorane

To testobservatorar er aktuelle

- (1) Sannsynsrateobservatoren er høvetalet mellom to sannsyn (Likelihoodar)

”Likelihood ratio test”

Denne kan nyttast analogt med F-testen i OLS

- (2) Wald observatoren kan nyttast til å lage testar analogt med t-observatoren i OLS regresjon

Sannsynsratetesten (1)

- Sannsynsratetesten :
- Differansen mellom **LogLikelihooden** ($\mathcal{LL}$) til to modellar estimert på same datamateriale kan nyttast til å teste to nesta modellar mot kvarandre omlag som F observatoren i OLS regresjon
- Testen kan og nyttast på einskildkoeffisientar. I små utval er den betre enn Wald testen

Sannsynsratetesten (2)

Sannsynsrate test observatoren

$$\chi^2_H = -2[\mathcal{LL}(\text{modell1}) - \mathcal{LL}(\text{modell2})]$$

vil, dersom nullhypotesen om ingen skilnad mellom modellane er rett, vere tilnærma (for store n) kjikvadratfordelt med fridomsgrader lik differansen i talet på parametrar i dei to modellane (H)

Wald testen

Wald testen

- Wald (kjikvadrat) observatoren (oppgitt av SPSS) = t^2 = $(b_k/ SE(b_k))^2$ (slik t er brukt av Hamilton)
- Observatoren $t = b_k/ SE(b_k)$ vil kunne nyttast til testing av einskilte parametrar omlag som t-observatoren i OLS regresjon
- Gitt at nullhypotesen er rett vil t (for store n) i logistisk regresjon vere tilnærma normalfordelt
- Gitt at nullhypotesen er rett vil Wald observatoren (for store n) i logistisk regresjon vere tilnærma Kjikvadratfordelt med df=1

Konfidensintervall for parameterestimat

- Konfidensintervall for parameterestimat kan konstruerast ut frå at kvadratrota av Wald observatoren med 1 fridomsgrad er tilnærma normalfordelt
- $b_k - t_\alpha * SE(b_k) < \beta_k < b_k + t_\alpha * SE(b_k)$

  der t_α er tabellverdien teken frå normalfordelinga med signifikansnivå α
- I mangel av tabellar over normalfordeling kan ein gjere seg nytte av at **t-fordelinga** er tilnærma lik normalfordelinga ved store n-K (t.d. n-K > 120)

Modellen av sannsynet for at vi skal observere y=1 for person i

$$\Pr(y_i = 1) = E\left[y_i \mid x\right] = \frac{1}{1+\exp\left(-L_i\right)} = \frac{\exp(L_i)}{1+\exp(L_i)}$$

der logiten $L_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K-1} \beta_j X_{ji}$ er ein lineær funksjon av forklaringsvariablane

Ut frå formelen er det ikkje lett å tolke kva koeffisientane β_j tyder

TOLKING: ODDS og ODDSRATER

- Logiten, L_i, ($L_i = \beta_0 + \Sigma_j \beta_j x_{ji}$) er definert som den naturlege logaritmen til oddsen.

Det tyder at

- oddsen $= O_i(Y_i=1) = \exp(L_i) = e^{L_i}$

og

- **oddsraten** $= O_i(Y_i=1|\ L_i') / O_i(Y_i=1|\ L_i)$
  - der L_i' og L_i har ulik verdi for ein $x_{.j.}$

Oddsraten

- Oddsraten, **O**, kan tolkast som den **relative effekten** av å ha **ein** variabelverdi heller enn ein annan
- t.d. dersom $x_{ki} = t+1$ i L_i' og $x_{ki} = t$ i L_i
- $\mathbf{O} = O_i(Y_i=1|\ L_i')/ O_i(Y_i=1|\ L_i)$
  $= \exp[L_i']/ \exp[L_i]$
  $= \exp[\beta_k]$
- Kvifor β_k ?

Oddsraten: eksempel[1] (1)

- Oddsen for å svare ja =
  $e^{b_0+b_1*\text{Alder}+b_2*\text{Kvinne}+b_3*\text{E.utd}+b_4*\text{Barn i HH}}$
- Oddsraten for å svare ja mellom kvinner og menn =

$$\frac{e^{b_0+b_1*Alder+b_2*1+b_3*E.utd+b_4*Barn\_i\_HH}}{e^{b_0+b_1*Alder+b_2*0+b_3*E.utd+b_4*Barn\_i\_HH}} = e^{b_2}$$

[1] Hugs reknereglane for potensar

Oddsraten: eksempel (2)

- Oddsraten for å svare ja for eitt års tilvekst i utdanning

$$\frac{e^{b_0+b_1*Alder+b_2*Kvinne+b_3*(E.utd+1)+b_4*Barn\_i\_HH}}{e^{b_0+b_1*Alder+b_2*Kvinne+b_3*E.utd+b_4*Barn\_i\_HH}}=e^{b_3}$$

BETINGA EFFEKT PLOTT

- Gi faste verdiar til alle x variablar unnateke ein, t.d. variabel x_k og set desse inn i likninga for logiten
- Plott Pr(Y=1) som funksjon av x_k , dvs
- P =1/(1+exp[-L]) = 1/(1+exp[-konst - $b_k x_k$])

  for rimelege verdiar av x_k
- "konst" er konstanten ein får ved å setje inn i logiten dei valde faste variabelverdiane og summere dei

Utdrag frå Hamilton Tabell 7.4

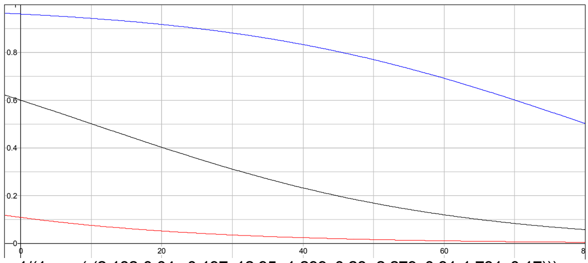
	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)	Minimum	Maximum	Mean
lived	-,040	,015	6,559	1	,010	,961	1,00	81,00	19,2680
educ	-,197	,093	4,509	1	,034	,821	6,00	20,00	12,9542
contam	1,299	,477	7,423	1	,006	3,664	,00	1,00	,2810
hsc	2,279	,490	21,591	1	,000	9,763	,00	1,00	,3072
nodad	-1,731	,725	5,696	1	,017	,177	,00	1,00	,1699
Constant	2,182	1,330	2,692	1	,101	8,866			

Logiten:

L = 2.182 -0.04*lived -0.197*educ +1.299*contam +2.279*hsc -1.731*nodad

Her lar vi "lived" variere og set inn høveleg valde verdiar for dei andre

Betinga effekt plott frå Hamilton tabell 7.4 (fig7.5) effekten av å bu lenge i byen



y=1/(1+exp(-(2.182-0.04x-0.197×12.95+1.299×0.28+2.279×0.31-1.731×0.17)))
y=1/(1+exp(-(2.182-0.04x-0.197×12.95+1.299×1+2.279×1-1.731×0)))
y=1/(1+exp(-(2.182-0.04x-0.197×12.95+1.299×0+2.279×0-1.731×1)))

Determinasjonskoeffisientar

- I logistiske regresjonsmodellar finst ikkje mål tilsvarande determinasjonskoeffisienten i OLS regresjon
- Fleire analoge mål har vore foreslått
- Dei er vert ofte kalla pseudo R^2
- Hamilton nyttar Aldrich og Nelson sitt

  pseudo $R^2 = \chi^2/(\chi^2+n)$

  der χ^2 = testobservatoren for testen av heile modellen mot ein modell med berre konstant, og n = er talet på case

LOGISTISK REGRESJON: FØRESETNADER

- Modellen er korrekt spesifisert
  - logiten er lineær i parametrane
  - alle relevante variablar er med
  - ingen irrelevante er med
- x-variablane er målt utan feil
- Observasjonane er uavhengige
- Ikkje perfekt multikollinearitet
- Ikkje perfekt diskriminering
- (Stort nok utval)

FØRESETNADER som ikkje kan testast

- Modellen er korrekt spesifisert
  - Om alle relevante variablar er med
- x-variablane er målt utan feil
- Observasjonane er uavhengige

To føresetnader vil teste seg sjølve

- Ikkje perfekt multikollinearitet
- Ikkje perfekt diskriminering

Statistiske problem kan komme av

- For lite utval
- Høg grad av **multikollinearitet**
  - Fører til store standardfeil (usikre estimat)
  - Vert oppdaga og handtert på same måten som i OLS regresjon
- Høg grad av **diskriminering** (eller separasjon)
  - fører til store standardfeil (usikre estimat)
  - Vert oppdaga automatisk av SPSS

Diskriminering/ separasjon

- Problem med diskriminering dukkar opp når vi for ein gitt x-verdi får nesten perfekt prediksjon av y-verdien (nesten alle med ein gitt x-verdi har same y-verdi)
- I SPSS kan dette gi følgjande melding:

Warnings

• There is possibly a quasi-complete separation in the data. Either the maximum likelihood estimates do not exist or some parameter estimates are infinite.
• The NOMREG procedure continues despite the above warning(s). Subsequent results shown are based on the last iteration. Validity of the model fit is uncertain.

Statistiske problem: linearitet i logiten?

- Kurvelinearitet i logiten kan gi skeive parameterestimat
- Spreiingsplott for y-x er lite informative sidan y berre har to verdiar
- For å teste om Logiten er lineær i ein x-variabel kan vi gjere følgjande
  - Gruppere x-variabelen
  - For kvar gruppe finne y-gjennomsnitt og rekne det om til logit
  - Lag ein graf av logitane mot gruppert x

Statistiske problem: påverknad

- Påverknad frå utliggjarar og uvanlege x-verdiar er like problematisk i logistisk regresjon som i OLS regresjon
- Transformasjon av x-variablar til symmetri vil minimere innverknaden til ekstreme variabelverdiar
- Store residualar er indikator på stor innverknad

Påverknad: residualar

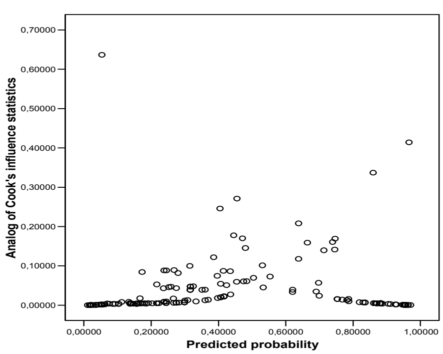
- Det finst ulike måtar å standardisere residualar på:
  - ”Pearsonresidualar” og
  - ”Avviksresidualar”
- Påverknad kan baserast på
  - Pearsonresidualen
  - Avviksresidualen
  - Leverage (potensiale for påverknad): dvs. observatoren h_j

Diagnosegrafar

Utliggjarplott kan baserast på plott av estimert sannsyn for $Y_i=1$ (estimert P_i) mot

- Delta B , ΔB_j , eller
- Delta Pearson Kjikvadratet, $\Delta \chi^2_{P(j)}$, eller
- Delta Avviks Kjikvadratet, $\Delta \chi^2_{D(j)}$

Delta B

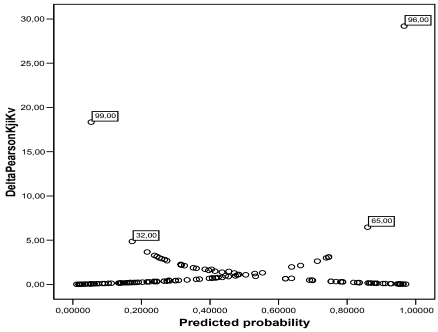


Utrekning av $\Delta\chi^2_{P(i)}$

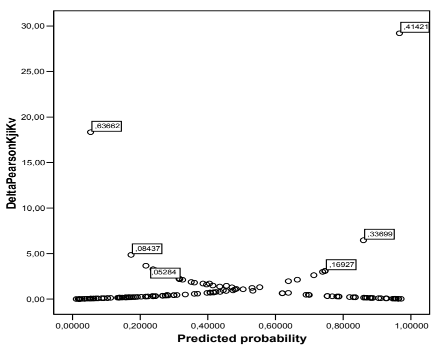
- Med utgangspunkt i dei storleikane SPSS gir oss kan vi rekne ut ”delta Pearson kjikvadratet”
- Der det står r_j i formelen set vi inn ZRE_1 og der det står h_j set vi inn LEV_1

$$\Delta\chi^2_{P(j)} = \frac{r_j^2}{\left(1-h_j\right)}$$

Delta Pearson Kjikvadrat (m/CaseNO)



Delta Pearson Kjikvadrat (m/ delta B)



Frå Case til Mønster

- Figurane ovanfor er ikkje identisk med Hamilton sine figurar
- Hamilton har korrigert for effekten av identiske mønster

Påverknad ved felles mønster av x-variablar

- I logistisk regresjon med få variablar vil mange case ha dei same verdiane på alle x-variablane. Kvar kombinasjon av x-variabelverdiar kallar vi eit mønster.
- Når mange case har same mønster, kan kvart case ha liten innverknad medan dei samla kan ha uvanleg stor innverknad på parameterestimata
- Påverknadsrike mønster i x verdiane kan dermed gi skeive parameterestimat

To kjikvadrat observatorar

- Pearson Kjikvadrat observatoren

$$\chi_P^2 = \sum_{j=1}^{J} r_j^2$$

- Avviks kjikvadrat observatoren

$$\chi_D^2 = \sum_{j=1}^{J} d_j^2$$

- Formlane er dei same anten vi reknar case eller mønster

Kjikvadrat observatorane

Begge kjikvadrat observatorane

1. Pearson Kjikvadratet χ^2_P og
2. Avviks Kjikvadratet χ^2_D

- Kan lesast som ein test av nullhypotesen om ingen skilnad mellom den estimerte modellen og ein ”metta modell”, dvs. ein modell med like mange parametrar som case / mønster

Meir om mål for påverknad

- Mål for påverknad ved endring (Δ) i observator/ parameterverdi pga utelatne case med mønster j
  - ΔB_j “delta B” - analog til Cook’s D
  - $\Delta\chi^2_{P(i)}$ “delta Pearson Kjikvadrat”
  - $\Delta\chi^2_{D(i)}$ “delta Avviks Kjikvadrat”

Kva er store verdiar av $\Delta\chi^2_{P(i)}$ og $\Delta\chi^2_{D(i)}$

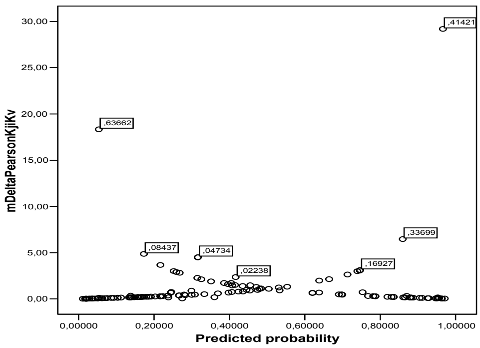
- $\Delta\chi^2_{P(i)}$ og $\Delta\chi^2_{D(i)}$ måler begge kor dårleg modellen passar med mønsteret j. Store verdiar indikerer at modellen ville passe til data mye betre dersom alle case med mønsteret vart utelatne.
- Sidan begge måla er asymptotisk kjikvadratfordelt vil verdiar større enn 4 indikere at eit mønster påverkar parameterestimata ”signifikant”

$\Delta\chi^2_{P(i)}$ “delta Pearson Kjikvadrat”

- Måler minken i Pearson χ^2 som følgjer av utelating av alle case med mønster j

$$\Delta\chi^2_{P(j)} = \frac{r_j^2}{\left(1 - h_j\right)}$$

delta Pearson Kjikvadrat (m/delta B)



Logistisk regresjon: Konklusjonar (1)

Vanleg OLS verkar dårleg ved dikotome avhengige variablar sidan vi

- umogeleg kan får normalfordelte feil eller homoskedastisitet, og sidan
- modellen gir sannsyn utanfor intervallet 0-1

Logit modellen er betre

- Likelihoodrate observatoren kan teste nesta modellar omlag som F-observatoren
- I store utval vil Wald observatoren [eller t=SQRT(Wald)] kunne teste einskildkoeffisientar og konfidensintervall kan konstruerast
- Det finst ikkje nokon determinasjonskoeffisient

Logistisk regresjon: Konklusjonar (2)

- koeffisientane i estimerte modellar kan tolkast ved
  1. Log-odds (direkte tolking)
  2. Odds
  3. Oddsratar
  4. Sannsyn (betinga effekt plott)
- Ikkje-linearitet, case med innverknad, og multikollinearitet gir same typen problem som i OLS regresjon (usikre parameterverdiar)
- Diskriminering gir problem av same typen (høge variansestimat, dvs. usikre parameterverdiar)
- Diagnosearbeid er viktig