SOS3003

Anvendt statistisk dataanalyse i samfunnsvitenskap

Forelesingsnotat 09

Erling Berge
Institutt for sosiologi og statsvitenskap
NTNU

Forelesing VIII

- Kurvetilpasning
  Hamilton kap 5 s145-273

Kurvetilpassing

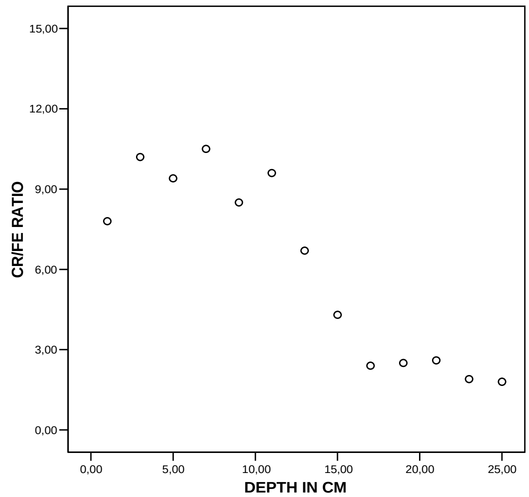
- Ein rett spesifisert modell krev at funksjonen som bind x-variablane og y variabelen saman er i samsvar med røyndomen: er sambandet lineært?
- Data kan granskast gjennom bandregresjon eller glatting
- Teori om kausalsambandet kan spesifisere eit ikkje-lineært samband
- For fenomen som ikkje kan representerast med ei rett linje skal vi sjå på nokre alternativ
  - Kurvelineær regresjon
  - Ikkje-lineær regresjon

Bandregresjon

- Kan nyttast til å utforske korleis sambanda mellom variablane ser ut.
- Dersom vi kan sjå at ein underliggjande trend i data er ikkje-lineær, må vi gjennom transformasjonar eller bruk av kurver finne ei form på funksjonen som betre representerer samanhengen

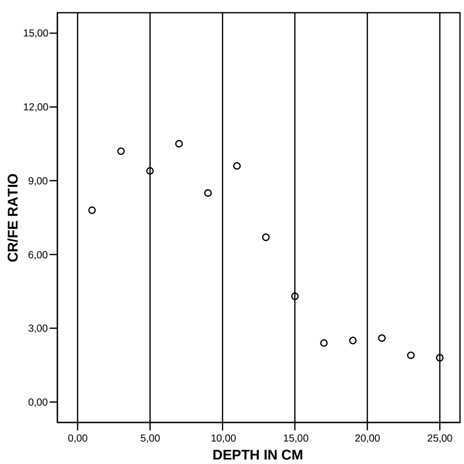
Ureining i ulike djup av sediment på sjøbotnen utanfor NH

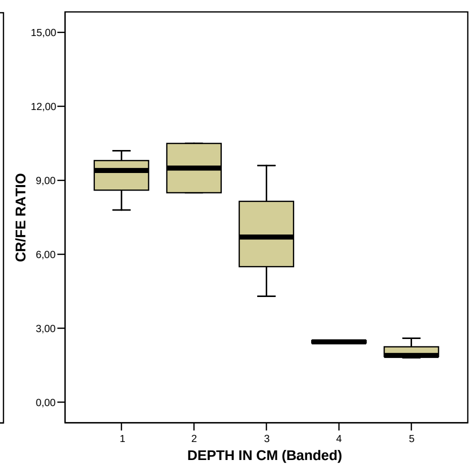
- Ureining målt ved raten krom/jern i ulike djup av ulike sedimentprøver
- Er sambandet lineært?



Fall 2004 © Erling Berge 2004 5

Medianane i 5 band: raten krom/jern i sediment utanfor kysten i NH





Sambandet er tydeleg ikkje-lineært

Fall 2004 © Erling Berge 2004 6

Transformerte variablar

- Brukar vi transformerte variablar vert regresjonen kurvelineær. Transformasjonen gjer den opphavelege kurvesamanhengen til ein lineær samanheng
- Dette er den viktigaste grunnen til å transformere.
- Samtidig kan transformering ordne opp i ulike typar statistiske problem (utliggjarar, heteroskedastisitet, ikkje-normale feil)
- Framgangsmåte:
  - Vel høveleg transformasjon og lag nye transformerte var.
  - Gjennomfør ein standard analyse med dei transformerte var
  - For tolking bør ein vanlegvis transformere attende til opphaveleg måleskala

Fall 2004 © Erling Berge 2004 7

Den lineære modellen

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K-1} \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i$$

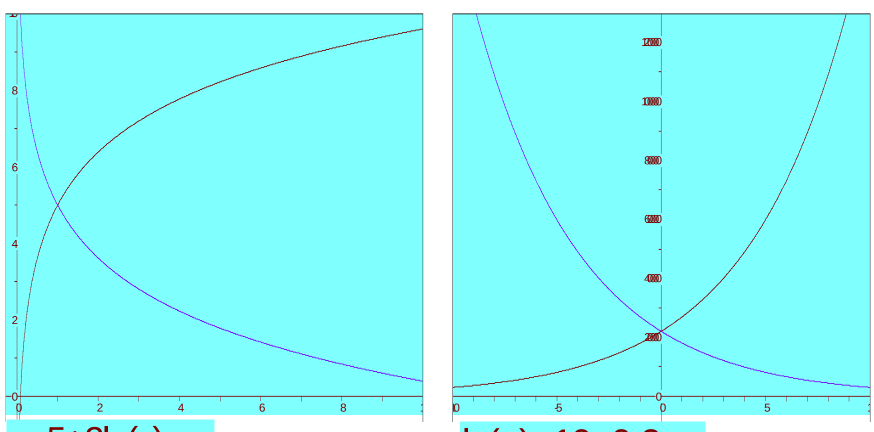
- I den lineære modellen kan vi transformere x-ane og y-ane utan at det har noko å seie for eigenskapane til OLS-estimata i seg sjølv.
- Så lenge modellen er lineær i parametrane er OLS ein lovleg metode

Fall 2004 © Erling Berge 2004 8

Kurvelineære Modellar

- Dette er i praksis regresjon med transformerte variablar
- Vi skal sjå på korleis ulike transformasjonar gir ulik form på sambanda
  - – Semilogaritmiske kurver
  - – Log-Log kurver
  - – Log-resiproke kurver
  - – Polynom (2 og 3 orden)

Semilogaritmiske kurver Fig 5.2 i Hamilton



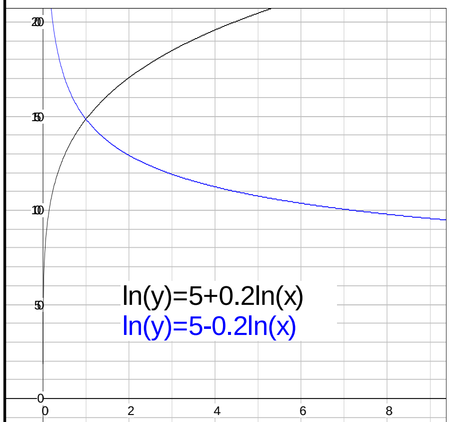
$y=5+2\ln(x)$

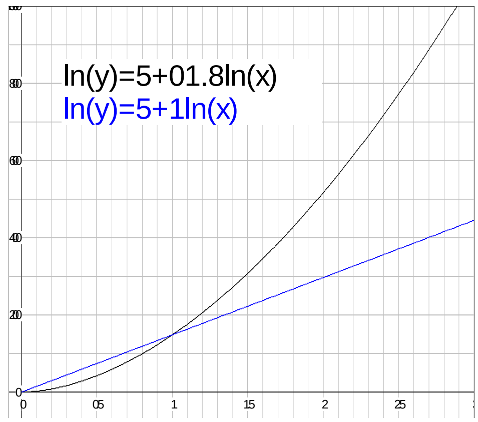
$y=5-2\ln(x)$

$\ln(y)=10+0.2x$

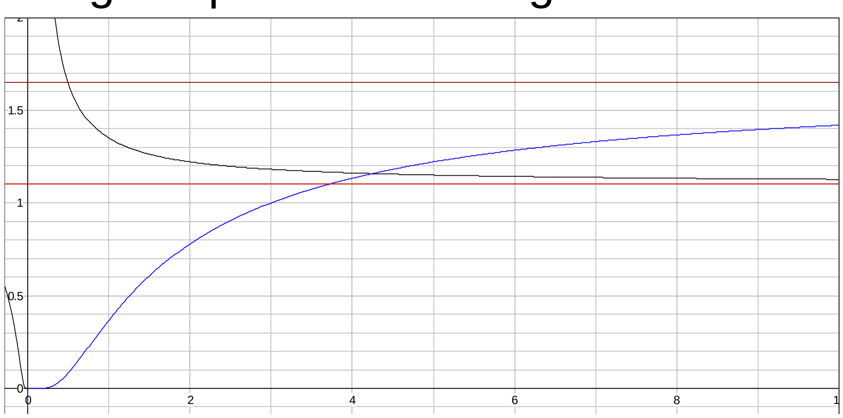
$\ln(y)=10-0.2x$

Log-log kurver Fig 5.3 i Hamilton





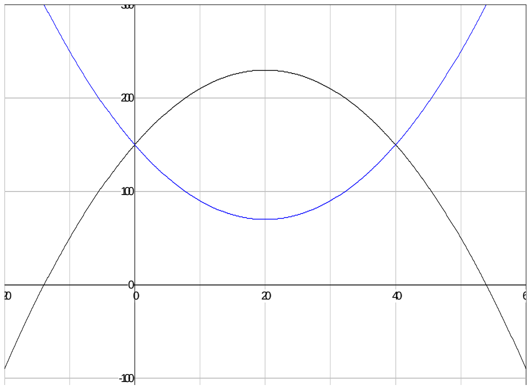
Log-resiproke kurver Fig 5.4 Hamilton



ln(y)=0.1+0.2/x
ln(y)=0.5-1.5/x
Horizontal line through (0, 1.105)
Horizontal line through (0, 1.649)

Dei horisontale linjene gir verdien av y når x veks mot uendeleg: asymptoten for y

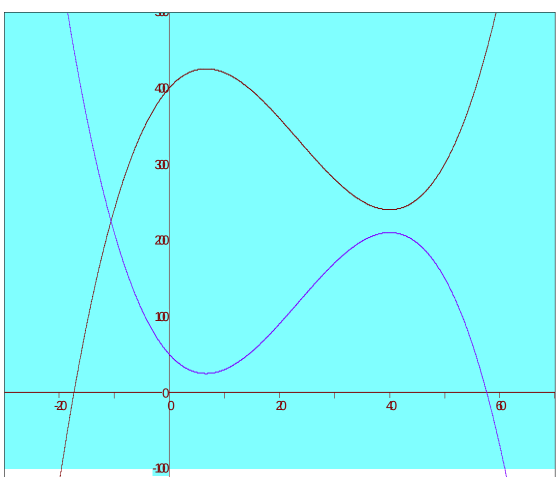
Andregrads polynom Fig 5.5 Hamilton



y=150+8x-0.2x^2

y=150-8x+0.2x^2

Tredjegrads polynom Fig 5.6 Hamilton



y=400+8x-0.7x^2+0.01x^3

y=50-8x+0.7x^2-0.01x^3

Val av transformasjon

- Spreiingsplott eller teori kan gi råd
- Elles er <u>transformasjon til symmetri</u> det beste utgangspunktet
- Regresjonen rapportert i tabell 3.2 i Hamilton viste seg problematisk
- Regresjon med transformerte variablar kan redusere problema

Fall 2004 © Erling Berge 2004 15

Val av transformasjon i tab 3.2 Hamilton

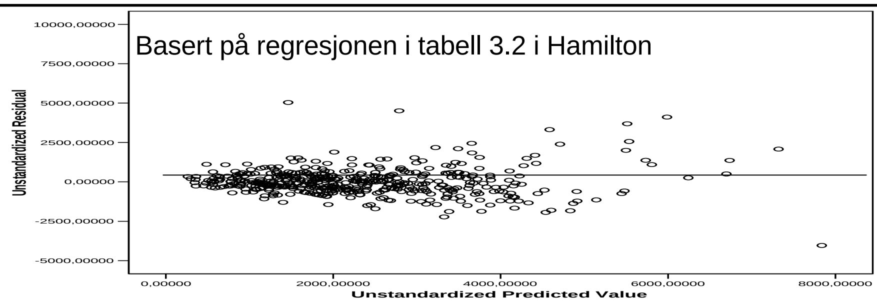
Y = Vassforbruk 1981	$Y^*=Y^{0.3}$ gir tilnærma symmetri
X_1 = Inntekt	$X_1^* = X_1^{0.3}$ gir tilnærma symmetri
X_2 = Vassforbruk 1980	$X_2^* = X_2^{0.3}$ gir tilnærma symmetri
X_3 = Utdanning	Transformasjonar kan gjere lite
X_4 = Pensjonist	Transformasjon påverkar ikkje dummyvar
X_5 = # menneskje i 1981	$X_5^* = \ln(X_5)$ gir tilnærma symmetri
X_6 = Endring i # menneskje	$X_6 = X_5 - X_0$ (= # menneskje i 1980)
X_7 = Relativ endring i # m	$X_7^* = \ln(X_5/X_0)$

Fall 2004 © Erling Berge 2004 16

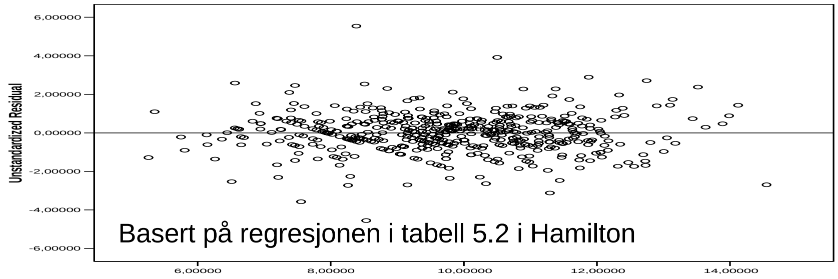
Regresjon med transformerte variable Tab 5.2 Hamilton

Dependent Variable: (Wateruse81)$^{0.3}$	B	Std. Err	t	Sig.
(Constant)	1,856	,385	4,822	,000
Income$^{0.3}$	,516	,130	3,976	,000
Wateruse80$^{0.3}$	,626	,029	21,508	,000
Education in Years	-,036	,016	-2,257	,024
Retired?	,101	,119	,852	,395
Ln(number of people81)	,715	,110	6,469	,000
Ln(people81/people80)	,916	,263	3,485	,001

Fall 2004 © Erling Berge 2004 17



Residual mot predikert Y



Fall 2004 © Erling Berge 2004 18

Andre verknader av transformasjonane

- To case med stor innverknad på koeffisienten for inntekt (store DFBTAS) har no ikkje slik innverknad (fig 4.11 og 5.9)
- Eit case med stor innverknad på koeffisienten for vassforbruk i 1980 har no ikkje så stor innverknad (fig 4.12 og 5.10)
- Transformasjonar som gjer fordelingar symmetriske vil ofte løyse mange problem – men ikkje alltid!

Tolking

- Estimatet av modellen ser no slik ut

$$y_i^{0.3} = 1.856 + 0.516 x_{1i}^{0.3} + 0.626 x_{2i}^{0.3} - 0.036 x_{3i}$$

$$+0.101 x_{4i} + 0.715 \ln(x_{5i}) + 0.916 \ln(\frac{x_{5i}}{x_{0i}})$$

- Tolking av koeffisientane er ikkje lenger så enkelt (t.d.: måleeiningane på parametrane er endra)
- Den enklaste måten å tolke på er å nytte betinga effekt plott

Betinga effektplott

- Blir brukt til studere samanhengen mellom den avhengige variabelen y og ein x-variabel gitt faste verdiar på dei andre uavhengige variablar
- Typisk er vi interessert i samanhengen x-y når dei andre variablane får verdiar som
  - Maksimerer y
  - Representerer gjennomsnittverdiar
  - Minimerer y

Eksempel basert på regresjonen i tabell 3.2 i Hamilton

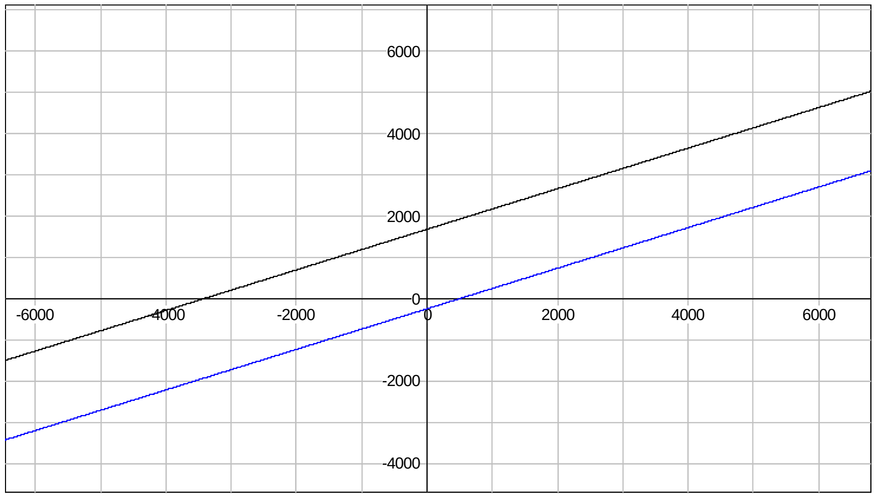
Dependent Variable: Summer 1981 Water Use	Unstandardized Coefficients			
	B	Std. Error	t	Sig.
(Constant)	242,220	206,864	1,171	,242
Summer 1980 Water Use	,492	,026	18,671	,000
Income in Thousands	20,967	3,464	6,053	,000
Education in Years	-41,866	13,220	-3,167	,002
head of house retired?	189,184	95,021	1,991	,047
# of People Resident, 1981	248,197	28,725	8,641	,000
Increase in # of People	96,454	80,519	1,198	,232

For betinga effekt plott er det nyttig med ein tabell over minimum, maximum og gjennomsnitt

	N	Minimum	Maximum	Mean
Summer 1981 water use	496	100	10100	2298,39
Summer 1980 water use	496	200	12700	2732,06
Income in thousands	496	2	100	23,08
Education in years	496	6	20	14,00
Head of househ retired?	496	0	1	,29
# of people resident, 1981	496	1	10	3,07
Relative increase in # of people	496	-3	3	-,04
# People living in 1980	496	1	10	3,11

Likninga

- Estimert Y = 242,22 + 0,492X_1 + 20,967X_2 - 41,866X_3 + 189,184X_4 + 248,197X_5 + 96,454X_6
- Makismering av effekten av X_1 på Y krev maksimum av X_2 , X_4 , X_5 , X_6 og minimum av X_3
- Gjennomsnitts verdiar for av effekten av X_1 på Y får vi ved å setje inn gjennomsnittverdiar av X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6
- Minimering av effekten av X_1 på Y krev minimum av X_1 , X_2 , X_4 , X_5 , X_6 og maksimum av X_3

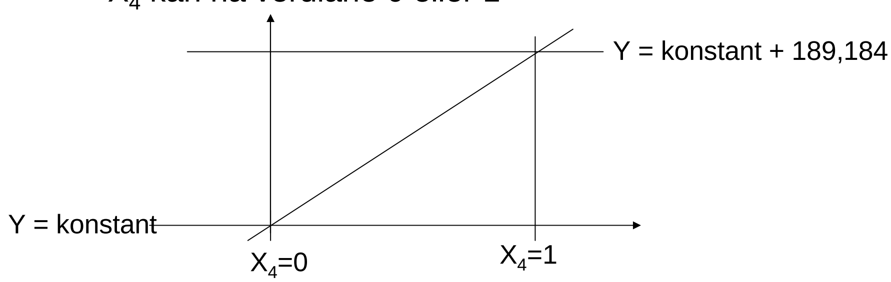


$Y = 242.22 + 0.492X + 20.967 \times 10 - 41.866 \times 7 + 189.184 \times 1 + 248.197 \times 5 + 96.454 \times 1$

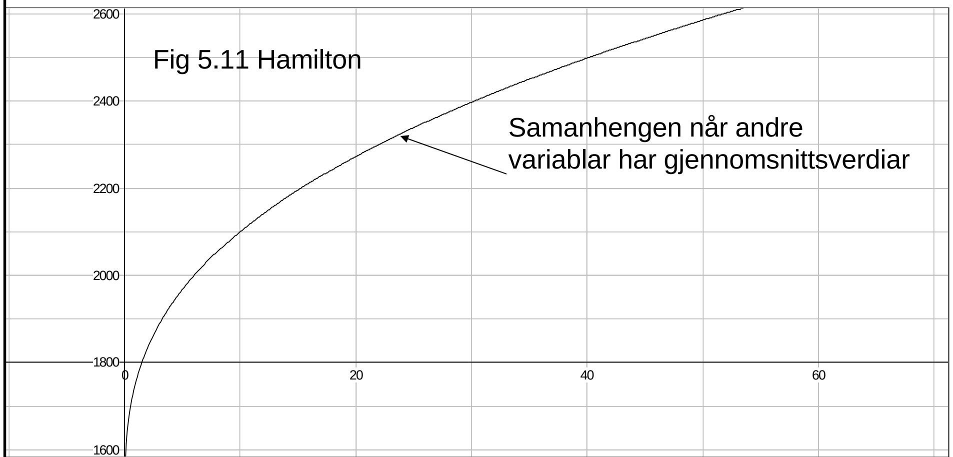
$Y = 242.22 + 0.492X + 20.967 \times 1 - 41.866 \times 18 + 189.184 \times 0 + 248.197 \times 1 + 96.454 \times 0$

Når x er dummykoda

- Estimert Y = 242,22 + 0,492X_1 + 20,967X_2 - 41,866X_3 + 189,184X_4 + 248,197X_5 + 96,454X_6
- Estimert Y = konstant + 189,184X_4
  - X_4 kan ha verdiane 0 eller 1



Vassforbruk etter inntekt kontrollert for andre variablar



$y^{0.3}$=1.856+0.626(2732)$^{0.3}$-0.036(14)+0.101(0.294)+0.715ln(3.07)+0.916(ln(3.07)-ln(3.11))+0.516(x)$^{0.3}$

Fall 2004 © Erling Berge 2004 27

Kva er interessant å plotte?

- Samanhengen inntekt vassforbruk kontrollert for ulike kombinasjonar av andre variabelverdiar
  1. Dei som minimerer vassforbruket
  2. Dei som maksimerer vassforbruket
  3. Gjennomsnittverdiane

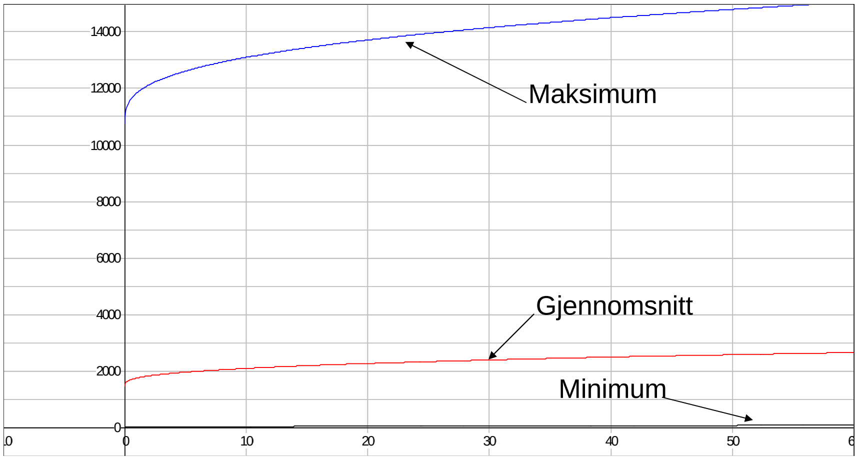
1 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(200)$^{0.3}$-0.036(20)+0.101(0)+0.715ln(1)+0.916(ln(1)-ln(10))+0.516(x)$^{0.3}$)

2 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(12700)$^{0.3}$-0.036(6)+0.101(1)+0.715ln(10)+0.916(ln(10)-ln(1))+0.516(x)$^{0.3}$)

3 $y^{0.3}$=(1.856+0.626(2732)$^{0.3}$-0.036(14)+0.101(0.29)+0.715ln(3.07)+0.916(ln(3.07)-ln(3.11))+0.516(x)$^{0.3}$)

Fall 2004 © Erling Berge 2004 28

Samanlikning av tre typar brukssituasjon



Samanhengen mellom inntekt og vassforbruk Fig 5.12 Hamilton

Fall 2004 © Erling Berge 2004 29

Konstanten si rolle i plottet

- Den einaste skilnaden mellom dei tre kurvene er konstanten
  - I maksimumskurva er (konst) = 14.046
  - I minimumskurva er (konst) = 4.204
  - I gjennomsnittskurva er (konst) = 8.507

$$y_i^{0.3} = (konst) + 0.516 x_{1i}^{0.3}$$

- Effekten av inntekt varierer med verdien av (konst)
- Når vi transformerer **avhengig** variabel vert **alle** samanhengar til interaksjonseffektar

Fall 2004 © Erling Berge 2004 30

Samanlikning av effektar

- I somme samanhengar kan ein nytte den standardiserte regresjonskoeffisienten til å samanlikne effektar, men den er sensitiv for skeive estimat av standardfeilen
- Ein meir generell metode er å samanlikne betinga effekt plott der skaleringa på y-aksen er halden konstant

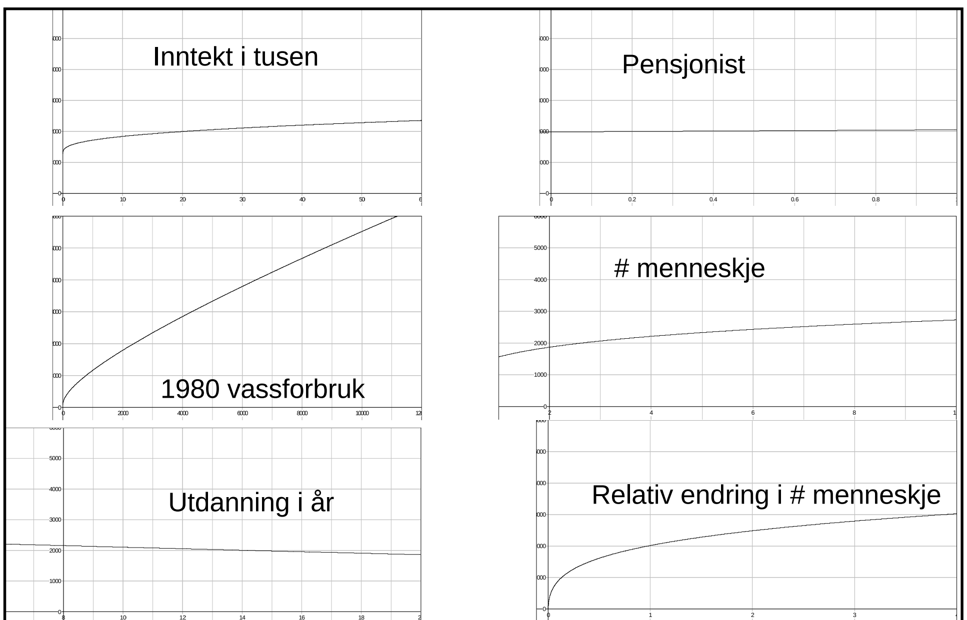
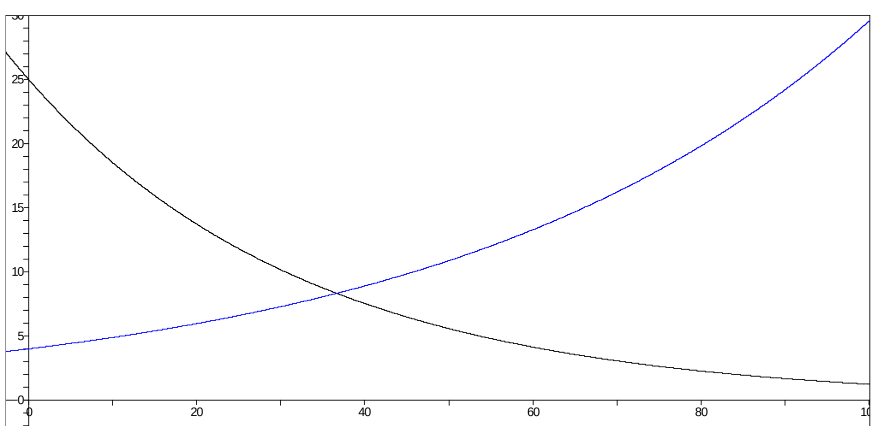


Fig 5.13 Hamilton

Ikkje-lineære modellar

- Dersom vi ikkje har modellar som er lineære i parametrane vil ein trenge andre teknikkar for å estimere parametrane
- Det kan vere to typar argument for slike modellar
  - Teori om den kausale mekanismen kan diktere ein slik modell
  - Inspeksjon av data kan peike på ein bestemt type modell
- Vi skal sjå på
  - Eksponentielle modellar
  - Logistiske modellar
  - Gompertz modellar

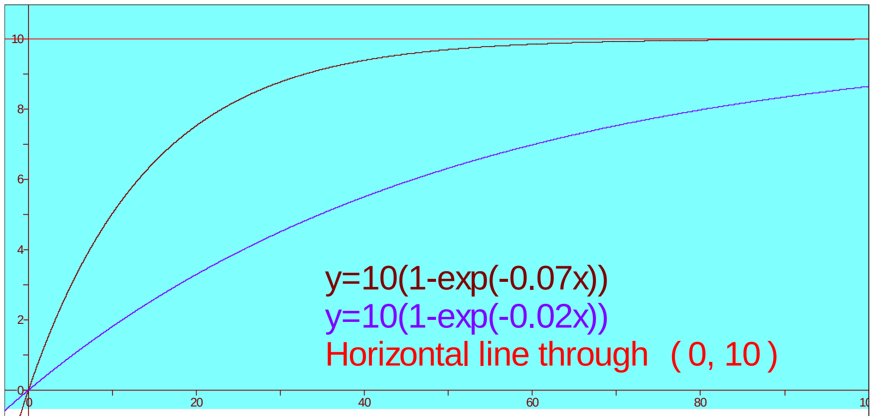
Eksponentiell vekst og fall Fig 5.14 Hamilton



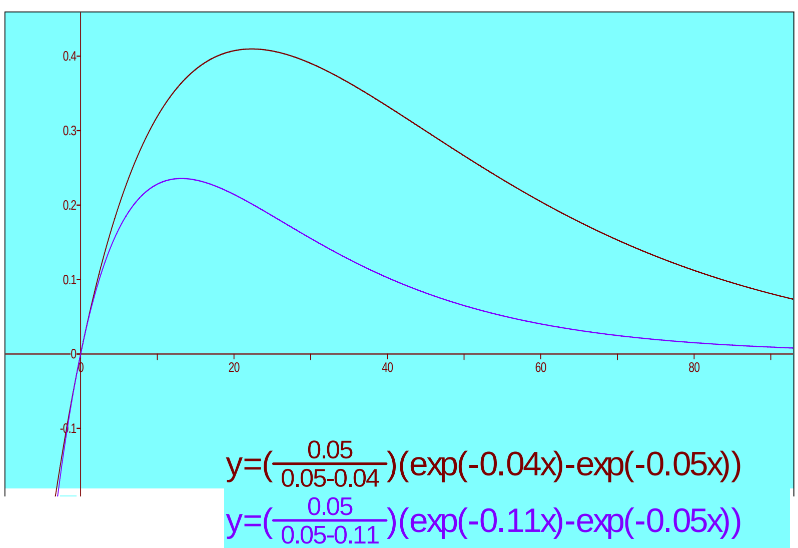
$y=25\exp(-0.03x)$

$y=4\exp(0.02x)$

Negative eksponential kurver Fig 5.15 Hamilton



To-ledds eksponentialkurver Fig 5.16 Hamilton



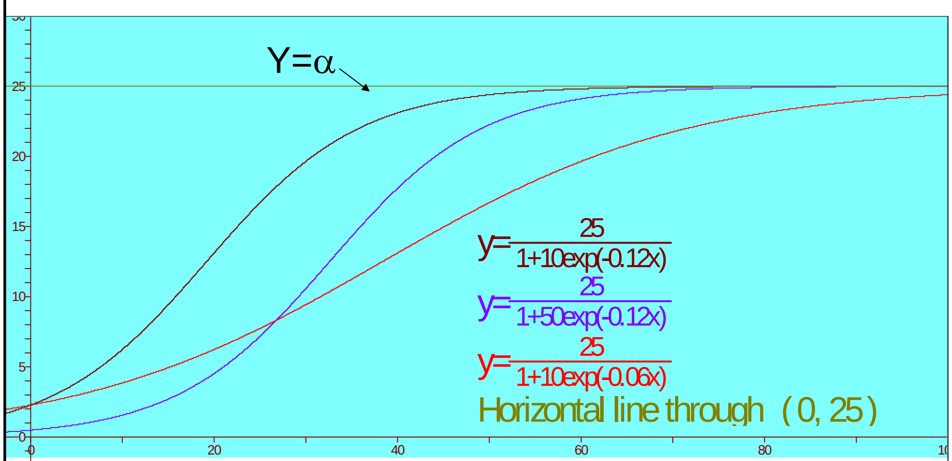
Logistiske modellar

- Den logistiske funksjonen skriv ein
- Når x veks mot uendeleg vil y nærme seg α
- Når x minkar mot minus uendeleg vil y nærme seg 0

$$y = \frac{\alpha}{1 + \gamma \exp\left(-\beta x\right)}$$

- Logistiske modellar passar til mange fenomen
  - Vekst i biologiske populasjonar
  - Spreiing av rykte
  - Spreiing av sjukdom

Logistiske kurver Fig 5.17 Hamilton



- γ fastset kvar veksten startar, β kor rask veksten er

Logistisk sannsynsmodell

- Dersom ein set α=γ=1 vil y variere mellom 0 og 1 når x varierer mellom minus uendeleg og pluss uendeleg.
- Logistiske kurver kan da nyttast til å modellere sannsyn

$$y_i = \frac{1}{1+\exp\left(-\beta x_i\right)} + \varepsilon_\iota$$

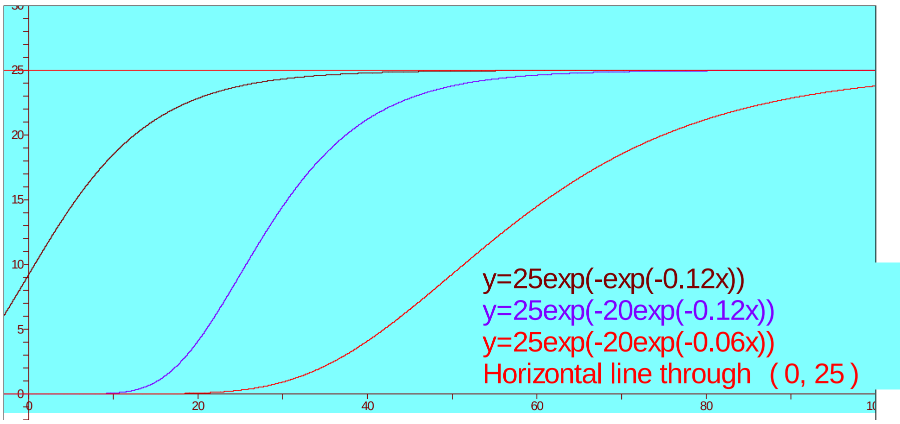
Gompertzkurver

- Gompertzkurver er sigmoidkurver slik som den logistiske, men tilvekst og vekstreduksjon skjer i ulik takt, så dei er ikkje symmetriske

$$y = \alpha e^{-\gamma e^{-\beta x}} + \varepsilon$$

- Parametrane α, γ og β har den same tolkinga som i den logistiske modellen

Gompertzkurver Fig 5.18 Hamilton



Fall 2004 © Erling Berge 2004 41

Estimering av ikkje-lineære modellar

- Kriteriet på tilpassing er framleis minimum RSS
- Ein kan sjeldan finne analytiske uttrykk for parametrane. Ein må gjette på ein startverdi og gå igjennom fleire iterasjonar for å finne kva parameterverdi som gir den minste RSS verdien
- Gode startverdiar er som regel nødvendig og alt frå teori til inspeksjon av data vert brukt for å finne dei

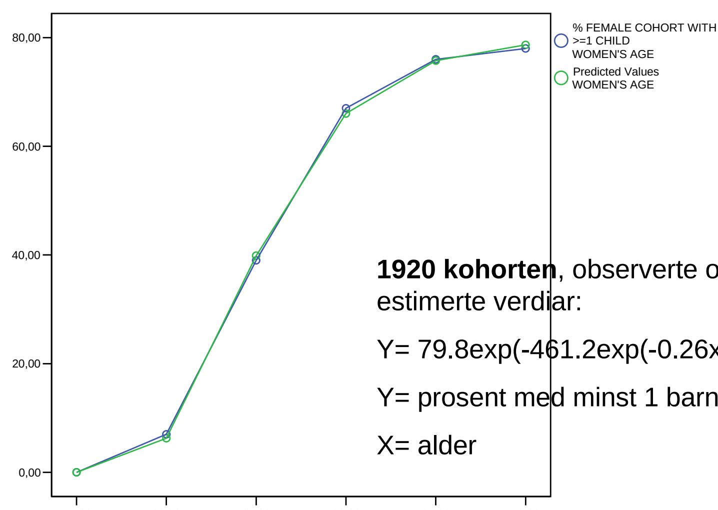
Fall 2004 © Erling Berge 2004 42

Prosent kvinner med minst 1 barn etter kvinnas alder og fødselsår (England og Wales)

	1920	1930	1940	1945	1950	1955	1960	1965
15	0	0	0	0	0	0	0	0
20	7	9	13	17	19	18	13	11
25	39	48	59	60	53	45	39	-
30	67	75	82	82	75	68	-	-
35	76	83	87	88	83	-	-	-
40	78	86	89	90	-	-	-	-
45	-	86	89	-	-	-	-	-

Fall 2004 © Erling Berge 2004 43

Estimering av Gompertz-modellar for kohortar (1)



1920 kohorten, observerte og estimerte verdiar:

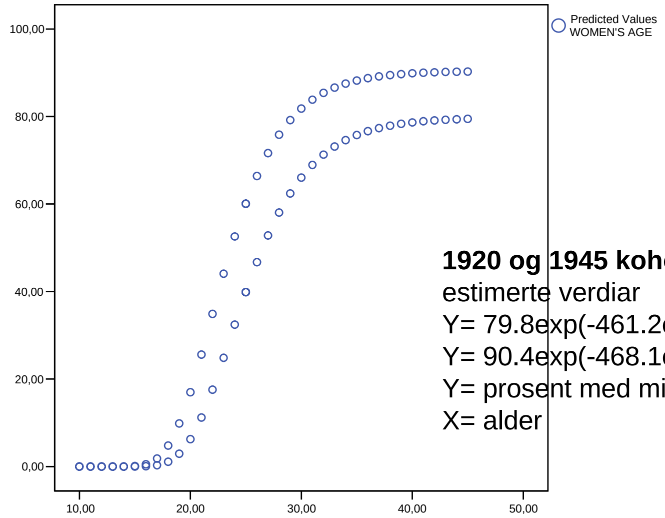
Y= 79.8exp(-461.2exp(-0.26x))

Y= prosent med minst 1 barn

X= alder

Fall 2004 © Erling Berge 2004 44

Estimering av Gompertz-modellar for kohortar (2)



1920 og 1945 kohortane,
estimerte verdiar
Y= 79.8exp(-461.2exp(-0.26x))
Y= 90.4exp(-468.1exp(-0.28x))
Y= prosent med minst 1 barn
X= alder

Fall 2004 © Erling Berge 2004 45

Modelltilpassing

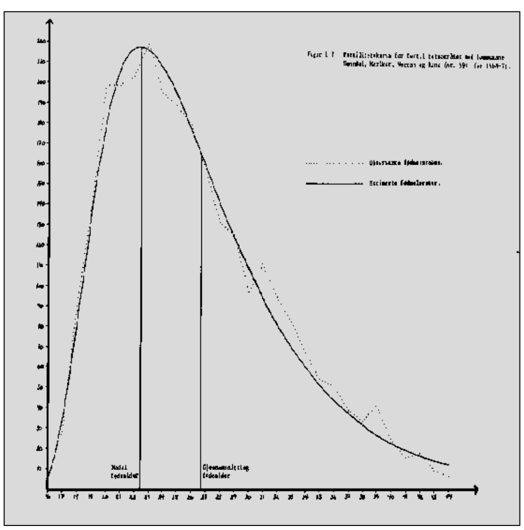
- For å evaluere ein teoretisk utleda modell
- For prediksjon av y innan eller ut over variasjonsområdet for x
- Substansiell eller komparativ vurdering av parameterverdiar
  - Her kan vi nytte modellen på kohortar som enno ikkje er ferdig med fødslane sine (prediksjon ut over observerte x verdiar)
  - Vi kan nytte modellen til å samanlikne parameterverdiane til ulike kohortar

Fall 2004 © Erling Berge 2004 46

Parametertolking Tab 5.6 Hamilton

Kohort	α = øvre grense	γ = ?	β = vekstfart
1920	79.8	461.2	0.26
1930	86.5	538.0	0.27
1940	89.1	942.0	0.31
1945	90.4	468.1	0.28
1950	87.5	144.9	0.23
1955	88.9	60.3	0.18

Fødselsrater i Sunndal, Meråker, Verran og Rana 1968-71



- Modellert med Hadwiger funksjonen
- Ref.: Erling Berge 1981 «The Social Ecology of Human Fertility in Norway 1970», Ph.D dissertation, Boston University

Konklusjonar i kapittel 5 (1)

- Dataanalyse startar ofte med lineære modellar. Dei er enklast.
- Teori eller utforskande dataanalyse (bandregresjon, glatting) kan seie oss om kurvelineære eller ikkje-lineære modellar trengst
- Transformasjon av variable gir kurvelineær regresjon. Dette kan motverke fleire problem
  - Kurvelinearitet i samanhengane
  - Case med stor påverknad
  - Ikkje-normale feil
  - Heteroskedastisitet

Konklusjonar i kapittel 5 (2)

- Ikkje-lineær regresjon nyttar iterative prosedyrar for å finne parameterestimat.
- Prosedyrane treng initialverdiar og er ofte sensitive for initialverdiane.
- Tolking av parametrar kan vere vanskeleg. Grafar som viser sambanda for ulike parameterverdiar vil hjelpe mye