SOS3003

Anvendt statistisk dataanalyse i samfunnsvitenskap

Forelesingsnotat 02

Erling Berge
Institutt for sosiologi og statsvitenskap
NTNU

Forelesing II

- Bivariat regresjon II
  - Hamilton Kap 2 s51-59
- Multivariat regresjon I
  - Hamilton Kap 3 s65-72

Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Repetisjon:
Bivariat Regresjon: Modell for utval

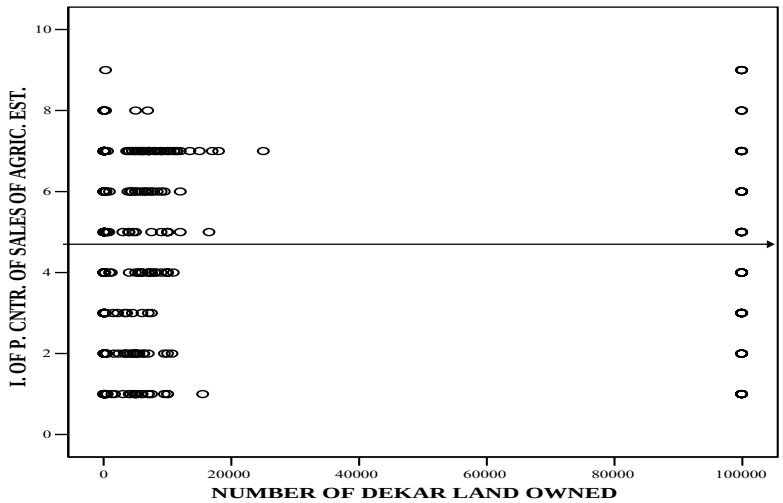
- $Y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + e_i$
- i=1,...,n n = # case i utvalet

Eksempel frå første forelesning med

- Y = IMPORTANCE OF PUBLIC CONTROL OF SALES OF AGRIC. ESTATES
- **X =** NUMBER OF DEKAR LAND OWNED

Kva var galt i eksempelet?

Kva er galt? Spreiingsdiagram med regresjonslinje



Generelt: Kva kan skape problem?

- Uteletne variablar
- Ikkje-lineære samanhengar
- Ikkje-konstant varians på feilen (heteroskedastisitet)
- Korrelasjon mellom feila (autokorrelasjon)
- Ikkje normale feil
- Case med uvanleg stor verknad

Ikkje-normale feil: Meir om variabelfordelingar

- Regresjon har **IKKJE føresetnader om fordelinga** til variablane
- MEN for å teste hypotesar må vi ha eit **normalfordelt feilledd**
- DERSOM **modellen er korrekt** og n er stor sikrar sentralgrenseteoremet at feilleddet er tilnærma normalfordelt
- MEN som regel er modellen feil eller ufullstendig. Derfor må vi **teste om residualen faktisk er normalfordelt**.

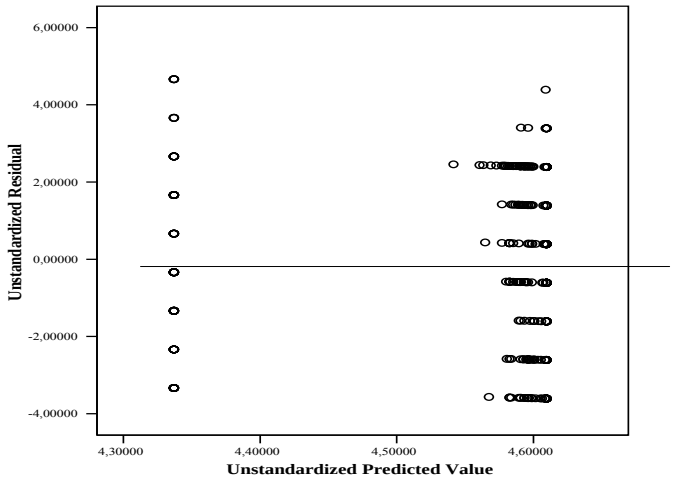
Residualanalyse:

Viktigaste innfallsporten til problema i regresjonsanalysen

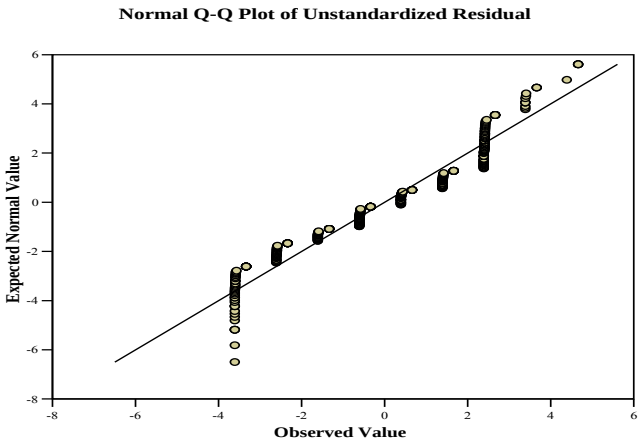
Hjelpemiddel:

- Scatterplott – spreiingsplott
- Plott av residual mot predikert verdi
- Histogram
- Boksplott
- Symmetriplott
- Kvantil-normalplott

Kva er galt? (1) residual-predikert verdi plott



Kva er galt? (2) residual normal-kvantilplott



Potenstransformasjonar

kan løyse problem i samband med

- kurvelinearitet i modellen
- utliggarar
- case med stor innverknad
- ikkje-konstant varians hos feilleddet
- ikkje-normale feilledd

Transformasjon er m.a.o. eit generelt verkemiddel

Potenstransformasjonar (jfr H:17-22)

Y* : les "transformert Y"
(transformasjon fra Y til Y*)

- $Y^* = Y^q$ q>0
- $Y^* = \ln[Y]$ q=0
- $Y^* = -[Y^q]$ q<0

Invers transformasjon
(transformasjon fra Y* til Y)

- $Y = [Y^*]^{1/q}$ q>0
- $Y = \exp[Y^*]$ q=0
- $Y = [-Y^*]^{1/q}$ q<0

Potenstransformasjonar: konsekvensar

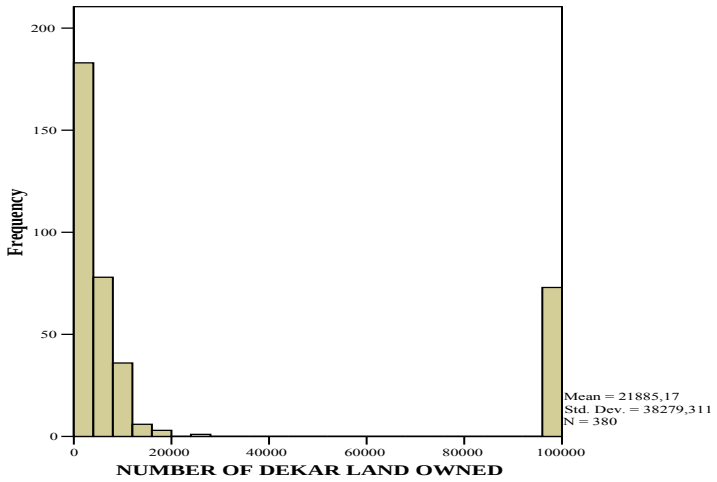
- $X^* = X^q$
  - q > 1 **aukar tyngda** til øvre hale relativt til nedre
  - q = 1 gir identitet
  - q < 1 **reduserer tyngda** til øvre hale relativt til nedre
- Dersom $Y^* = \ln(Y)$ vil regresjonskoeffesienten for ein intervallskala X variabel kunne tolkast som % endring i Y for ei einings endring i X

  Dvs. dersom $\ln(Y) = b_0 + b_1 x + e$

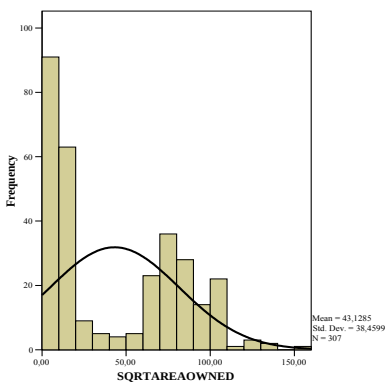
  Vil b_1 kunne tolkast som % endring i Y pr eining X

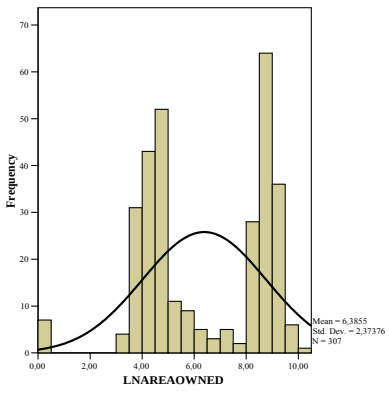
Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Utgangspunkt
X = NUMBER OF DEKAR LAND OWNED



Potenstransformert
X = NUMBER OF DEKAR LAND OWNED

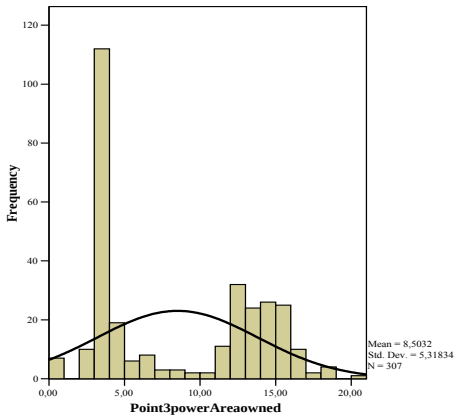




SQRT=kvadratrota av areaowned – LN=naturleg logaritme av (areaowned+1)

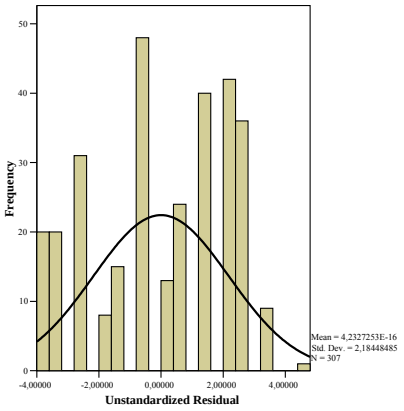
Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

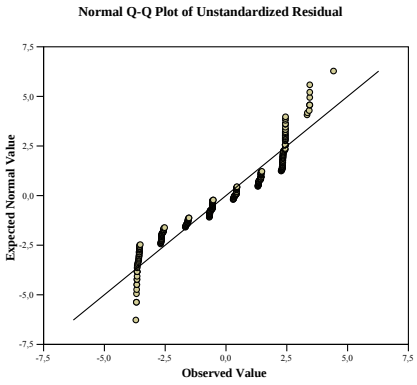
Potenstransformert
X = NUMBER OF DEKAR LAND OWNED



Poin3power = 0,3 potensen av areaowned

Hjelper det med potenstransformasjon?

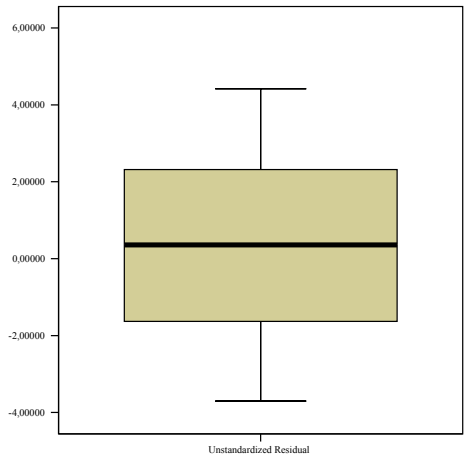




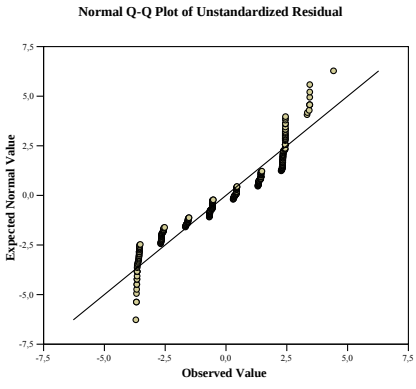
0.3potens-transformasjon gir lette halar og ingen utliggarar

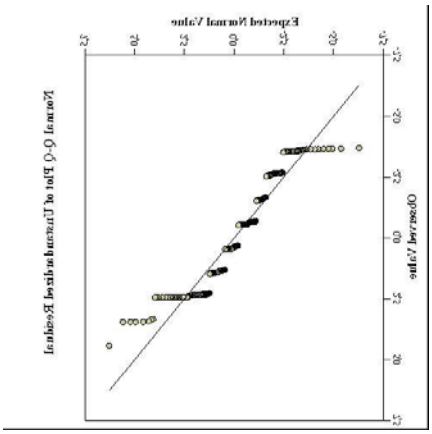
Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Boksplott av residualen viser tilnærma symmetri utan utliggarar



SPSSutskrift vs boka (jfr. s16)





Lesing av utskrifter fra SPSS (1)

Descriptive Statistics	Mean	Std. Deviation[1]	N[2]
I. OF P. CNTR. OF SALES OF AGRIC. EST.	4.61	2.185	307
Point3powerAreaowned	8.5032	5.31834	307

Model	R	R Square[3]	Adjusted R Square[4]	Std. Error of the Estimate[5]	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	.024(a)	.001	-.003	2.188	.001	.182	1	305	.670

a Predictors: (Constant), Point3powerAreaowned
b Dependent Variable: I. OF P. CNTR. OF SALES OF AGRIC. EST.

Fotnotar til tabellen ovanfor (1)

1. Standard-avviket til gjennomsnittet (mean)
2. Talet av case brukt i analysen
3. Determinasjonskoeffisienten
4. Den justerte determinasjonskoeffisienten, sjå Hamilton side 41
5. Standard-avviket til residualen

   s_e = SQRT (RSS/(n-K)),

   der SQRT = kvadratrota av (*)

Lesing av utskrifter fra SPSS (2)

Model		Sum of Squares[3]	df	Mean Square	F[1]	Sig.[2]
1	Regression	.870	1	.870	.182	.670(a)
	Residual	1460.224	305	4.788		
	Total	1461.094	306			

- Kvadratsummar: TSS = ESS + RSS
- $RSS = \Sigma_i(e_i)^2 = \Sigma_i(Y_i - \hat{Y}_i)^2$: sum kvadrert (avstand observert – estimert verdi)
- Mean Square = RSS / df For RSS har vi at df=n-K

  K er lik talet på parametrar som modellen estimerer (dvs b_0 og b_1)

  Her er n=307 og K=2, dvs. Df = 305

Fotnotar til tabellen ovanfor (2)

1. F-observatoren for nullhypotesa $beta_1 = 0$ (sjå Hamilton side 45)
2. p-verdien for F-observatoren: dvs sannsynet for å finne ein så stor eller større F-verdi gitt at nullypotesa er rett
3. Kvadratsummar
   1. TSS = ESS + RSS
   2. $RSS = \Sigma_i(e_i)^2 = \Sigma_i(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ avstand observert – estimert verdi
   3. $ESS = \Sigma_i(\hat{Y}_i - \tilde{Y})^2$ avstand estimert verdi – gjennomsnitt
   4. $TSS = \Sigma_i(Y_i - \tilde{Y})^2$ avstand observert verdi – gjennomsnitt

Lesing av utskrifter fra SPSS (3)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients			95% Confidence Interval for B	
		B[1]	Std. Error[2]	Beta[3]	t[4]	Sig.[5]	Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	4.524	.236		19.187	.000	4.060	4.988
	Point3-power Area-owned	.010	.024	.024	.426	.670	-.036	.056

Fotnotar til tabellen ovanfor (3)

1. Estimat av regresjonskoeffesientane b_0 og b_1
2. Standardavviket (standardfeilen) til parameterstimata b_0 og b_1
3. Dei standardiserte regresjonskoeffesientane: $b_1^{st} = b_1*(s_x/s_y)$ sjå Hamilton side 38-40
4. t-observatoren for nullhypotesa $beta_1 = 0$ (sjå Hamilton side 44)
5. p-verdien for t-observatoren: dvs sannsynet for å finne ein så stor eller større t-verdi gitt at nullypotesa er rett

Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Kurvelineær regresjon

- I eksempelet ovanfor brukte vi variabelen ”Point3powerAreaowned”, dvs 0.3 potensen av tal dekar areal ein eig. Dvs.:
- Point3powerAreaowned = (NUMBER OF DEKAR LAND OWNED)$^{0.3}$

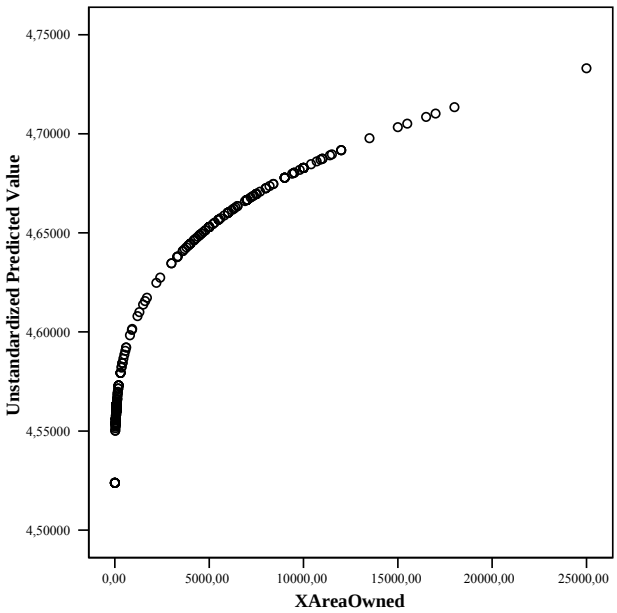
Modellen vi har estimert er altså

$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$

$y_i = b_0 + b_1$ Point3powerAreaowned$_i + e_i$

$\hat{y}_i = 4.524 + 0.010$*(NUMBER OF DEKAR LAND OWNED)$^{0.3}$

Bruk av potens-transformerte variablar betyr at regresjonen blir kurvelineær



Oppsummering

- I bivariat regresjon kan ein seie at OLS-metoden freistar finne den beste LINJA eller KURVA som passar til eit to-dimensjonalt spreiingsmønster
- Scatter-plott og residualanalyse er hjelpemiddel for å diagnostisere problem i regresjonen
- Transformsjonar er eit generelt hjelpemiddel mot fleire typar problem, som t.d.:
  - Kurvelinearitet
  - Heteroskedastisitet
  - Ikkje-normalitet
  - Case med stor innverknad
- Regresjon med transformerte variablar er alltid kurvelineær. Vi tolkar resultatet letast ved hjelp av grafar

Multippel regresjon: modell (1)

- Målet med multippel regresjon er å finne nettoeffekten av ein variabel, kontrollert for variasjonen i alle dei andre
- Sett K = talet på parametrar i modellen
  (dvs. K-1 er talet på variablar).
  Da kan (populasjons) modellen skrivast
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + ... + \beta_{K-1} x_{i,K-1} + \varepsilon_i$

Multippel regresjon: modell (2)

- Dette kan skrivast
  $y_i = E[y_i] + \varepsilon_i$,

  dette tyder at
- $E[y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_{K-1} x_{i,K-1}$
  $E[y_i]$ les vi som forventa verdi av y_i

Multippel regresjon: modell (3)

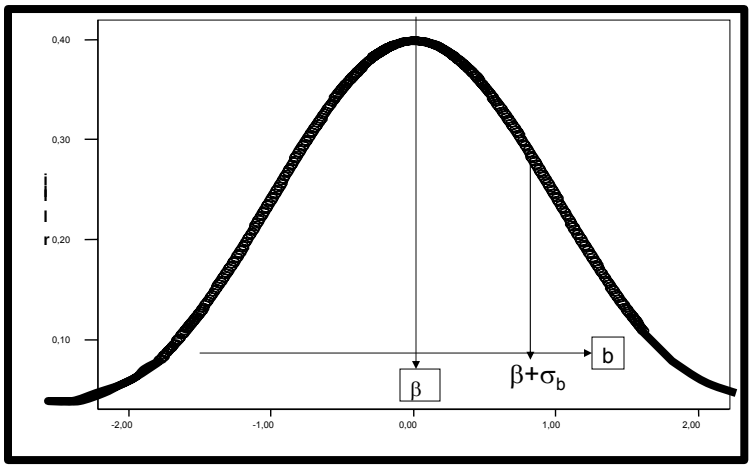
- Vi finn OLS estimata av modellen som dei b-verdiane i
  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + b_3 x_{i3} + \ldots + b_{K-1} x_{i,K-1}$
  ($\hat{y}_i$ les vi som estimert eller "predikert" verdi av y_i)
  som minimerer kvadratsummen av residualane

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Meir om hypotesetesting

- Frå ein populasjon kan det trekkjast mange utval
- I kvart nytt utval vil vi kunne estimere nye regresjonsparametrar
- Lagar vi eit histogram over ulike estimerte verdiar av t.d. β_1 vil vi sjå at b_1 har ei fordeling (ei samplingfordeling)
- Ulike parametrar og observatorar har ulike samplingfordelingar
- Regresjonsparametrane (b'ane) er t-fordelt



Sampling fordeling for regresjonsprameteren b: **E[b]= β**

Om partielle effektar (1)

- Eit eksempel med 2 variablar
- Dersom vi estimerer ein modell

  $y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + e_i$

  er det i prinsippet 3 ulike korrelasjonar som er involvert:
  - Mellom y og x_1
  - Mellom y og x_2
  - Mellom x_1 og x_2

Om partielle effektar (2)

- Dette kan teoretisk gi opphav til 3 ulike bivariate regresjonar der vi held den tredje variabelen konstant

  (1) $y = a_{y|x1} + b_{y|x1}x_1 + e_{y|x1}$ x_2 konstant

  (2) $y = a_{y|x2} + b_{y|x2}x_2 + e_{y|x2}$ x_1 konstant

  (3) $x_1 = a_{x1|x2} + b_{x1|x2}x_2 + e_{x1|x2}$ y konstant

  indeksen ”y|x1” les vi ”frå regresjonen av y på x1”
- Likningane (2) og (3) kan vi skrive om

Om partielle effektar (3)

(2) $e_{y|x_2} = y - (a_{y|x_2} + b_{y|x_2}x_2)$

(3) $e_{x_1|x_2} = x_1 - (a_{x_1|x_2} + b_{x_1|x_2}x_2)$

Vi ser no at vi så å seie "fjernar" effekten av x_2 frå y og frå x_1

Vi ser også at $e_{y|x_2}$ og $e_{x_1|x_2}$ vert nye variablar der effekten av x_2 er fjerna

Om partielle effektar (4)

- Dersom vi no lagar ein ny regresjon

  $\hat{e}_{y|x_2} = a + b\, e_{x_1|x_2}$

  finn vi at

  $a = 0$

  $b = b_1$ frå regresjonen

  $y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + e_i$
- b_1 er altså effekten av x_1 på y etter at vi har "fjerna" effekten av x_2

Eksperiment og partielle effektar

- I eksperiment granskar ein kausalsamband mellom to variable med kontroll for alle mogelege andre kausale faktorar
- Multippel regresjon er ei form for etterlikning av eksperimentet – ei nest beste løysing - og ligg nært opp til det som heiter kvasi-eksperimentelt forskingsdesign

KAUSALANALYSE

- Eksperiment
  - randomisering av påverknad ("behandling") gir presise kausale konklusjonar om verknader ("respons") ved signifikant skilnad i gjennomsnitt
  - kan vere umogeleg på grunn av
    - praktisk tilhøve
    - økonomiske skrankar
    - etiske vurderingar
- Kvasi-eksperiment der eksperiment er umogeleg
  - t.d. regresjonsanalyse

Ref.:
http://www.svt.ntnu.no/iss/Erling.Berge/

Eksperiment plasserer ”case” tilfeldig i ei av to grupper:

- **BEHANDLING (T)**
  med observasjon
  - FØR behandling
  - ETTER behandling
- **KONTROLL (C)**
  med observasjon
  - FØR ”ikkje-behandling”
  - ETTER ”ikkje-behandling”

Modell av kausaleffektar Ref.:

- Studiar av observasjonsdata brukar omgrep fra eksperimentell design
- “Påverknad/ Behandling”, “Stimulus” (Treatment/ Stimulus)
- “Effekt”, “Utfall” (Effect/ Outcome)

Ref.:

Winship, Chrisopher, and Stephen L. Morgan 1999 “The Estimation of Causal Effects from Observational Data”, Annual Review of Sociology Vol 25: 659-707

Modell av kausaleffektar:

Den "Kontrafaktiske" hypotesen for studiet av kausalitet

- Individet "i" kan i utgangspunktet tenkjast "selektert" til ei av to grupper
  - behandlingsgruppa, T, eller kontrollgruppa, C.
- Behandlinga, t (treatment), så vel som ikkje-behandling, c, kan i utgangspunktet tenkjast gitt til individ både i T- og C-gruppa
- Faktisk vil vi berre kunne observere t i T-gruppa og c i C-gruppa

Modell av kausaleffektar:

Den "Kontrafaktiske" hypotesen

- For kvart individ "i" kan ein tenkje seg fire mogelege utfall
  - $\mathbf{Y_i(c,C)}$ eller $Y_i(t,C)$; ved plassering i kontrollgruppe
  - $Y_i(c,T)$ eller $\mathbf{Y_i(t,T)}$; ved plassering i behandlingsgruppa
- Berre Y_i(c, gitt "i" er med i C) eller Y_i(t, gitt "i" er med i T) kan observerast for eit gitt individ

Modell av kausaleffektar:
Den "Kontrafaktiske" hypotesen

Litt meir formelt kan ein skrive dei mogelege utfalla for person i:

	Behandling: t	Ikkje beh.: c
T-gruppa	$\mathbf{Y^t_i \in T}$	$Y^c_i \in T$
C-gruppa	$Y^t_i \in C$	$\mathbf{Y^c_i \in C}$

Modell av kausaleffektar:
Den "Kontrafaktiske" hypotesen

- Kausaleffekten for individ i er da
- $\delta_i = Y_i(t) - Y_i(c)$
- Berre ein av desse to storleikane kan observerast for eit gitt individ

  Derfor "Den kontrafaktiske hypotesen"

Modell av kausaleffektar:
Den "Kontrafaktiske" hypotesen

- Vi kan til dømes observere
  Y_i (c |i∈C), men ikkje Y_i (t |i∈C)
- Problemet kan seiast å vere manglande data
- I staden for individeffektar vil ein estimere gjennomsnittseffektar i heile populasjonen

Modell av kausaleffektar:

- Gjennomsnittseffektar lar seg estimere, men som regel berre med store vanskar
- Ein føresetnad er at effekten av påverknad vil vere den same for eit gitt individ uavhengig av kva gruppe individet er plassert i
- Dette er likevel ikkje sjølvsagt

Modell av kausaleffektar:

Den “Kontrafaktiske” hypotesen føreset:

- at endring av behandlingsgruppe for eitt individ ikkje verkar inn på utfallet for andre individ (fråvær av interaksjon)
- at behandlinga, “påverknaden”, faktisk er manipulerbar (t.d.: kjønn er ikkje manipulerbar)

Modell av kausaleffektar:

- Ein av vanskane er at i eit utval vil den prosessen som plasserer personen ”i” i kontroll- eller behandlings-gruppa kunne verke inn på det estimerte gjennomsnittsutfallet (seleksjonsproblemet)
- I somme høve er likevel den interessante storleiken gjennomsnitteffekten for dei som faktisk får påverknaden

Modell av kausaleffektar:

- Det kan visast at det er to kjelder til feil (bias) i estimata av gjennomsnitteffekten
  - ein eksisterande skilnad mellom C- og T-gruppene
  - behandlinga verkar i prinsippet ulikt for dei som er i T-gruppa samanlikna med dei som er i C -gruppa
- For å handtere dette må vi utvikle modellar for korleis folk hamnar i C- og T-gruppene

Modell av kausaleffektar:

- Ein generell klasse metodar som kan nyttast til å estimere kausaleffektar er regresjonsmodellane
- Dei vil kunne “kontrollere” for observerbare skilnader mellom T- og C-gruppene, men ikkje for ulik respons på behandling