

Analytisk glatting av fødselsrater for Norge for åra
1968 til 1972

av

Erling Berge^{*}

	Side
1. Innleiing	35
2. Glattingane	36
3. Utviding av modellen	45
4. Sluttord	49
Litteraturliste	50

* Takk til Jan M. Hoem for veiledning og samarbeid under prosjektet.

1. Innleiing.

1.1. Vi har glatta dei nasjonale fødselsrater for Norge for åra frå 1968 til 1972, analytisk av to grunner: Først og fremst har vi vore interessert i å studere utviklinga av parametrane i glattingsfunksjonen over tida, men vi var og interessert i den empiriske testen av modellane vi fikk på dette viset.

1.2. Modellane og glattingsmetoden er beskrevne i tidlegare notat (Hoem og Berge 1974a og b, Berge 1974). Vi har glatta med både Hadwigerfunksjonen og GG-funksjonen (ein glattingsfunksjon basert på gamma-tett-heta). Fødselsratene vart rekna ut etter mors alder i fylte år ved utgangen av året. I tillegg til ratene for dei einskilde åra 1968 til 1972 rekna vi og ut gjennomsnittlege rater for 1968-71 og for 1969-72. (Sjå også Hoem, Berge og Hansen, 1974).

1.3. I figurane 1 til 7 har vi framstilt dei glatta ratene saman med dei observerte. Avvika er store og systematiske. I eit tidlegare notat (Hoem og Berge, 1974b) har vi og rapportert relativt store kjikvadratverdier som eit tekn på systematisk avvik frå modellen. Vi kan reagere på dette på to måter. Vi kan anten forkaste modellen totalt, og gjere noko anna, eller vi kan freiste å utvide den med nye relasjonar. Vi skal i dette notatet peike på ei mogleg utviding av modellane.

1.4. I ein freistnad på å utvide modellen fører vi inn den aldersspesifikke kjønnsproporsjonen mellom $x+i$ år gamle menn og x år gamle kvinner ($i=1, 2, 3$). Dette grunnar seg på følgande resonnement.

Kvinner gifter seg jamnt over med menn eldre enn dei sjølve. Når vi har svingingar i størrelsen på fødselskulla, vil dette føre til svingingar i tilbodet av ektemenn. Dersom størrelsen av fødselskulla er veksande, vil det vere eit underskot på menn eldre enn kvinnene slik at fleire kvinner må vente lengre på å bli gift enn ein normalt ville vente med jamstore kohortar. Dette bør gi seg utslag i ein lågare fødselsrate enn normalt for desse årsklassane. Det omvendte gjeld sjølvsagt når størrelsen på fødselskulla er avtakande. Dette resonnementet bygg sjølvsagt på den premiss at familiemønsteret i hovudsak er monogamt.

1.5. Resultatet av denne freistnaden på å utvide modellen synest å vere relativt vellukka. For den glattinga vi omtaler her, er kjikvadratsummen omlag halvert. Men fortsatt er avvika for store til å kallast tilfeldige. Ei mogleg vidareutvikling kan vere å nytte ein lineærkombinasjon av alle dei tre kjønnsproporsjonane.

2. Glattingane

2.1. Vi glatta fødselsratene frå 1968 til 1972 og gjennomsnittsratene for 1968-71 og 1969-72 med både Hadwiger-funksjonen og GG-funksjonen. (På figurane har vi berre teikna inn Hadwigerglattingane.) Vi nytta heile tida kjikvadratminimeringsmetoden med estimerte grenser for den reproduktive perioden slik det er beskrive av Berge og Hoem (1974). For åra 1968 til 1971 var lågaste alder som kom med i glattinga 15 år, høgaste var 48 år. I 1972 var lågaste og høgaste aldrane 15 år og 47 år, mens vi for gjennomsnittstalla nytta ratene frå 15 år til 49 år.

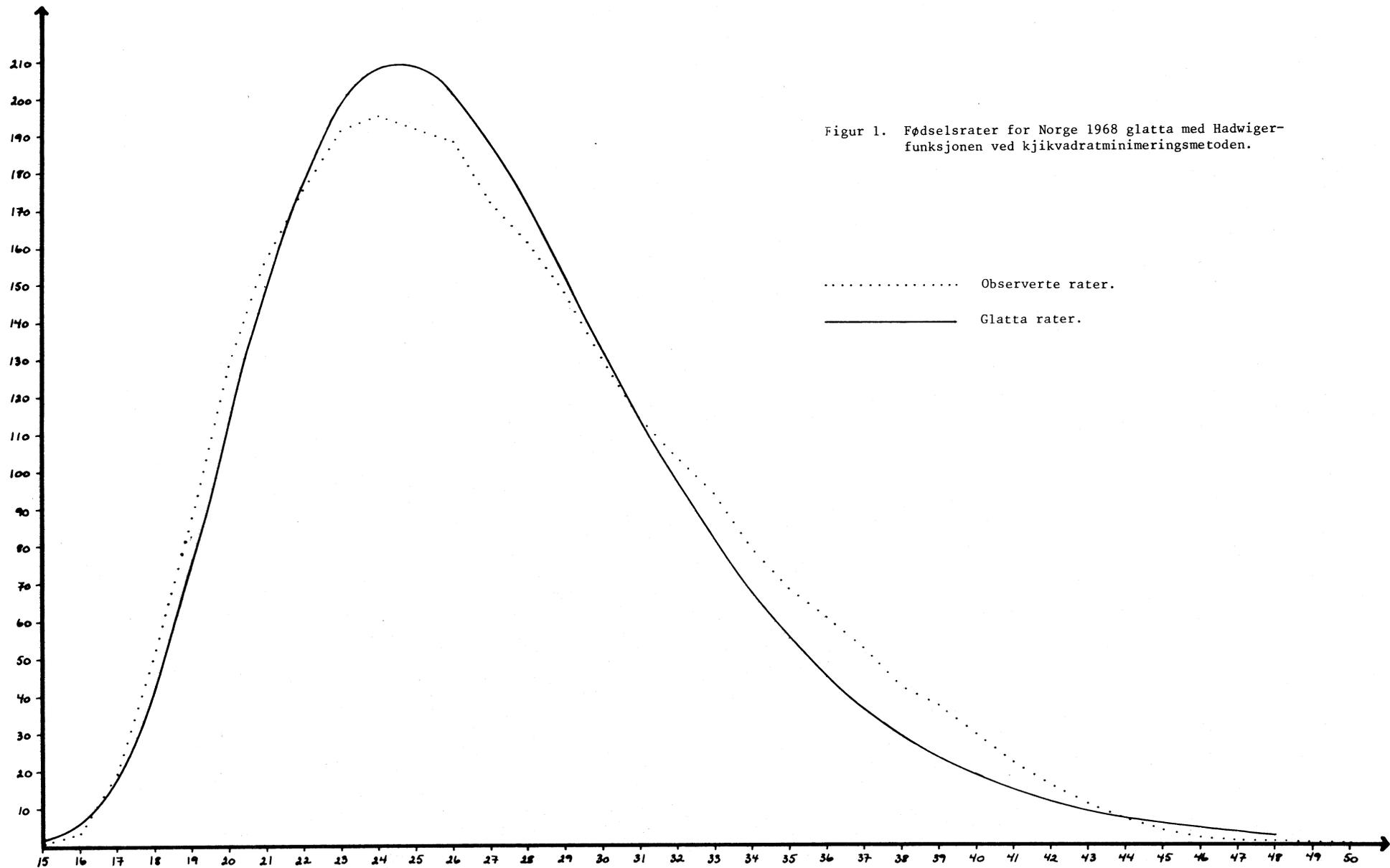
2.2. I tabell 1 finn vi estimat av fertilitetsparametrane for dei ulike åra. Estimatet av det samla fertilitetstallet ligg under det observerte, men viser sjølvsagt same utviklingstendens. Sjå tabell 3 hos Hoem, Berge og Hansen (1974). Både modal og gjennomsnittleg fødealder har i femårsperioden gått nedover med omlag eit halvt år. Samtidig finn vi skilnader i utviklinga. Frå 1971 til 1972 stoppa nedgangen i gjennomsnittleg fødealder, mens modal fødealder fortsatte å falle. Når det samla fertilitetstallet minkar og denne minken særleg skuldast nedgang i fødselsratene for kvinner eldre enn modal fødealder (sjå tabell 1 hos Hoem, Berge og Hansen (1974)), er det ein naturleg konsekvens at begge parametrane vil gå mot lågare verdi og også at avstanden mellom dei vil bli mindre. Dersom eit fortsatt fall i det samla fertilitetstallet fører til aukande avstand mellom modal og gjennomsnittleg fødealder, kan dette forklarast ved at reduksjonen i fødselsratene no ikkje lenger i hovudsak skjer mellom dei eldste kvinnene, men er flytta til dei aller yngste eller til kvinnene i aldrane omkring modal fødealder. Ser vi på tabell 1 hos Hoem, Berge og Hansen (1970), synest dette siste å vere tilfelle.

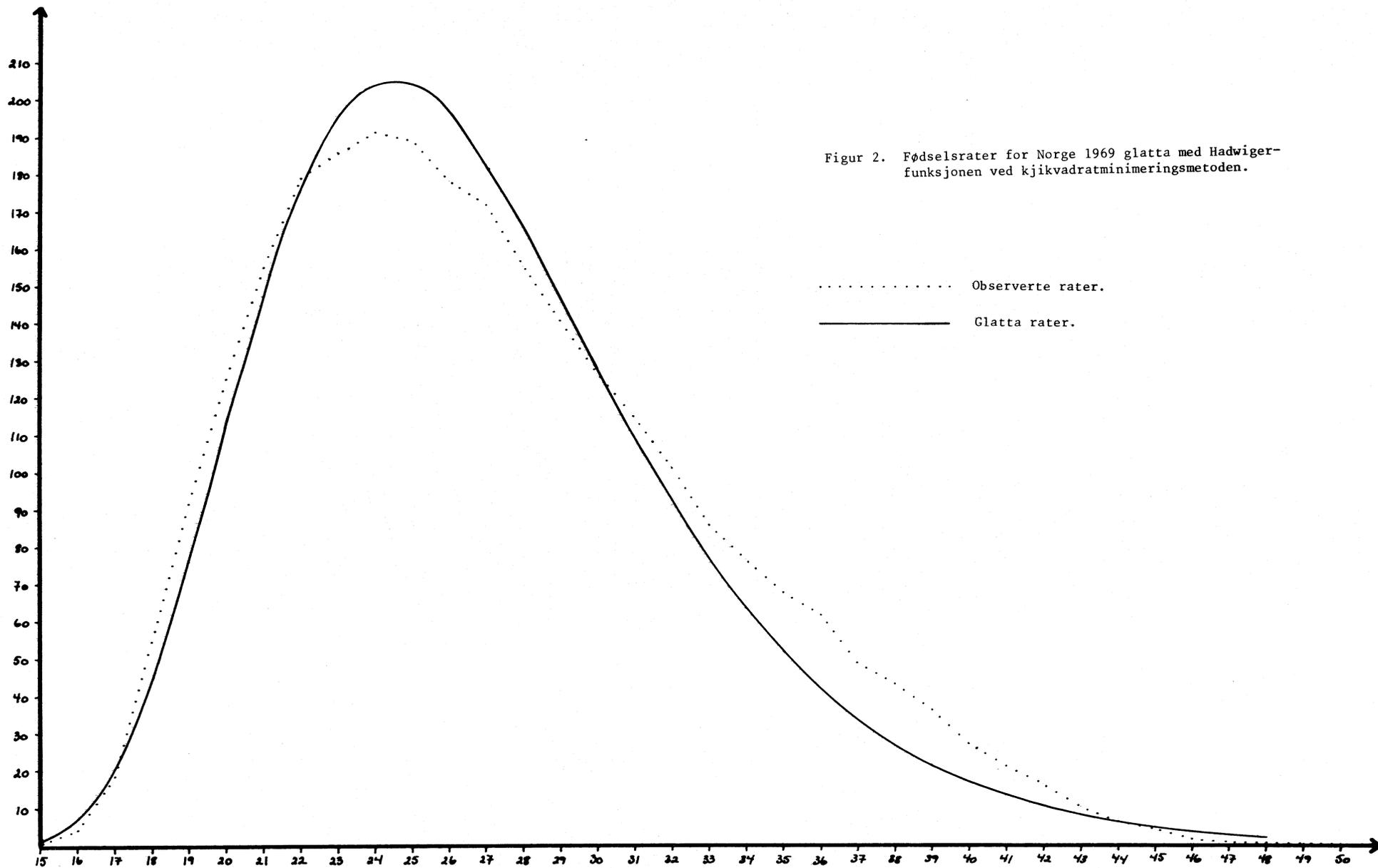
2.3. Samanliknar vi parametrane frå Hadwiger-glattingane med parametrane frå GG-glattingane, finn vi at GG-funksjonen estimerer det samla fertilitetstallet til å vere noko høgare enn Hadwiger-funksjonen. For modal og gjennomsnittleg fødealder er skilnadane nesten overraskande små når ein tenker på dei systematiske skilnadene mellom funksjonane som vi før har dokumentert (Berge og Hoem, 1974). Det er tydeleg at desse skilnadane først og fremst gir seg utslag i variansparameteren. Men også her er skilnadane relativt små.

Tabell 1. Estimerte^{*} fertilitets-parametrar for nasjonale data 1968-72

År	Samla fertilitets-tall	Modal føde-alder	Gjennomsnittleg føde-alder	Varians
HADWIGER				
1968	2.682	24,54	27,04	32,58
1969	2.603	24,50	26,90	31,62
1970	2.417	24,30	26,70	31,14
1971	2.393	24,15	26,52	30,15
1972	2.327	24,07	26,53	31,10
1968-71	2.491	24,50	26,66	29,07
1969-72	2.406	24,37	26,54	28,90
GAMMA				
1968	2.699	24,55	27,06	32,66
1969	2.622	24,50	26,92	31,82
1970	2.436	24,30	26,72	31,34
1971	2.414	24,16	26,55	30,42
1972	2.342	24,07	26,54	31,11
1968-71	2.511	24,46	26,68	29,55
1969-72	2.426	24,33	26,56	29,37

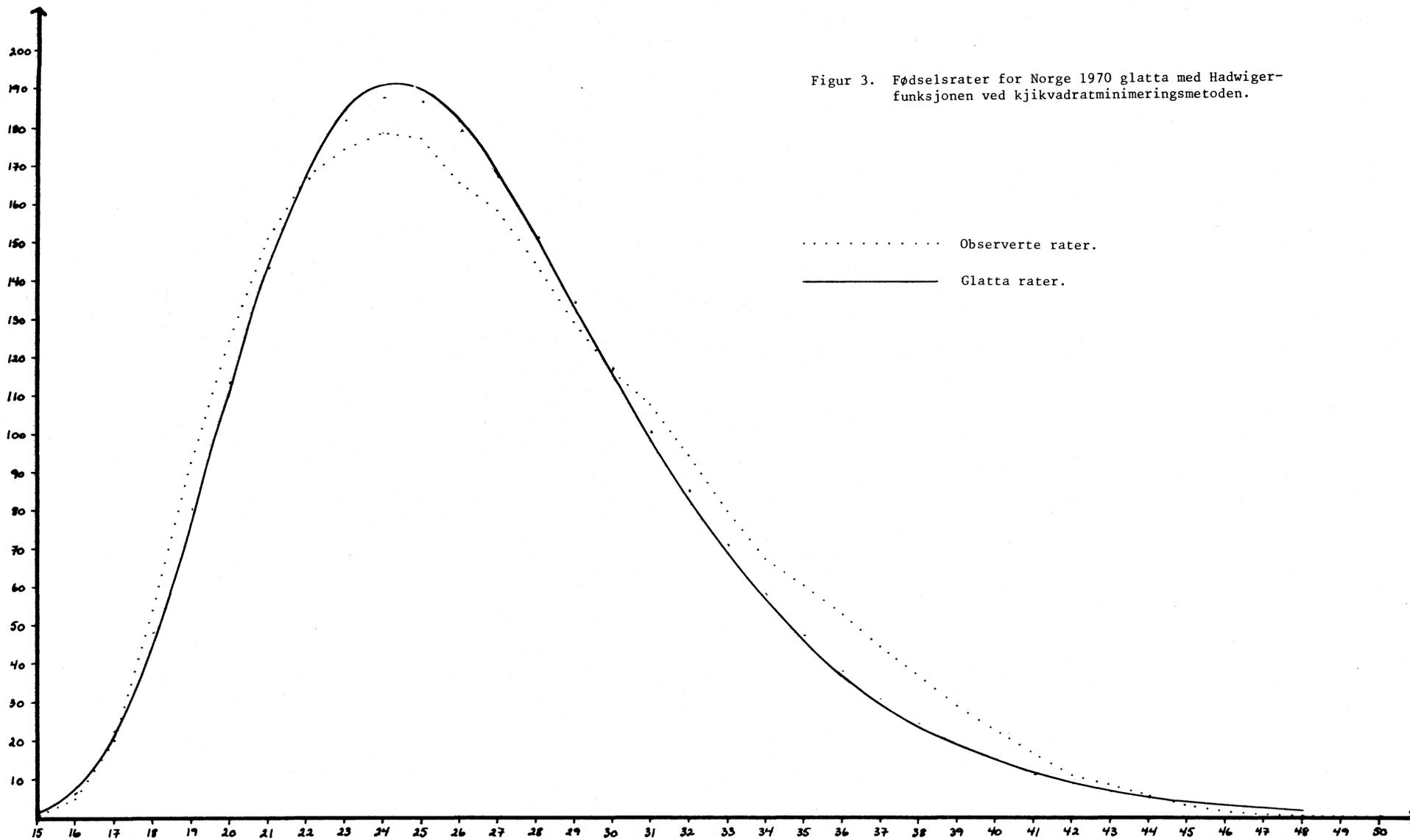
* Det er nytta estimerte grenser for den reproduktive perioden.





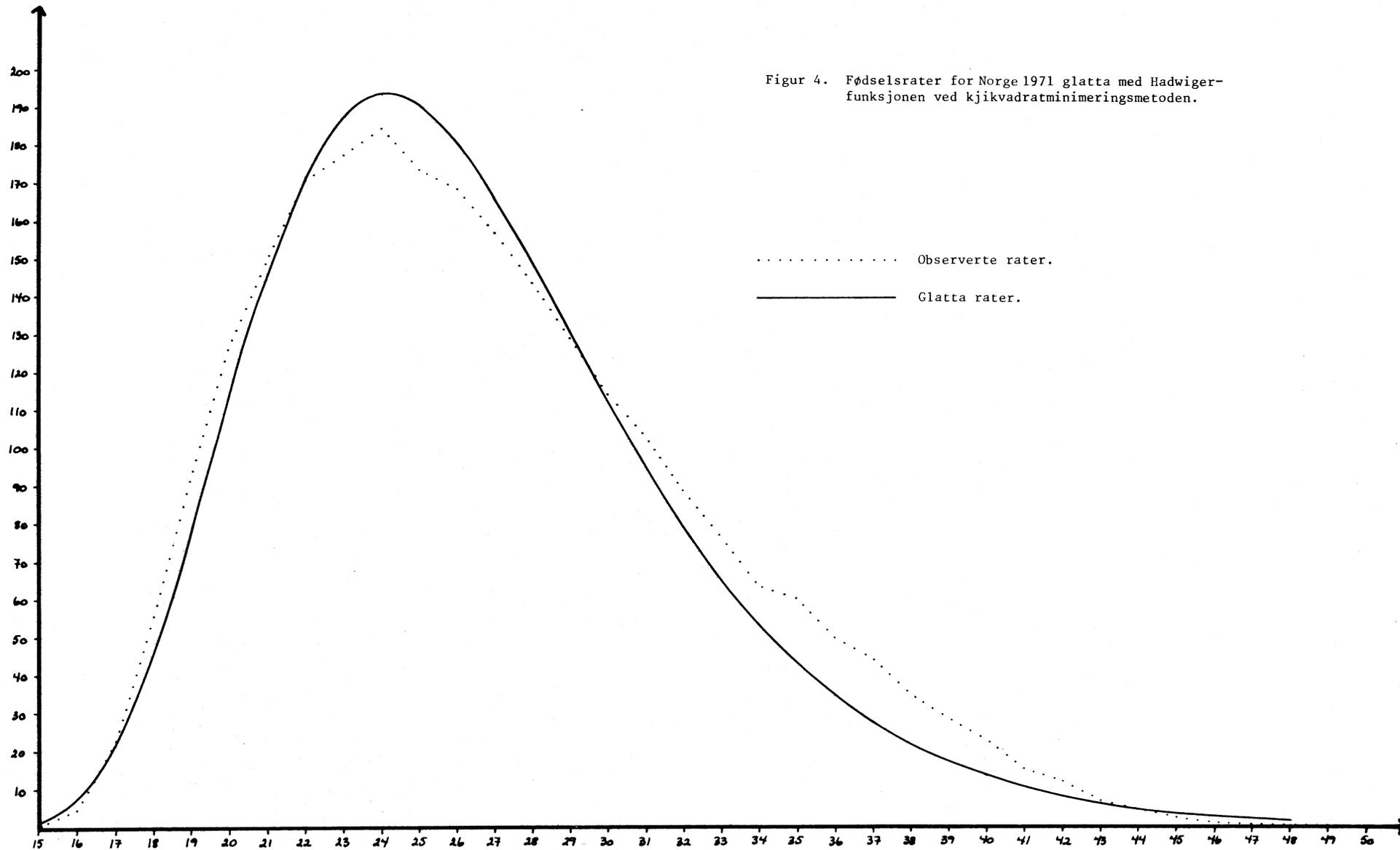
Figur 2. Fødselsrater for Norge 1969 glatta med Hadwiger-funksjonen ved kji kvadratminimeringsmetoden.

..... Observerte rater.
 — Glatta rater.



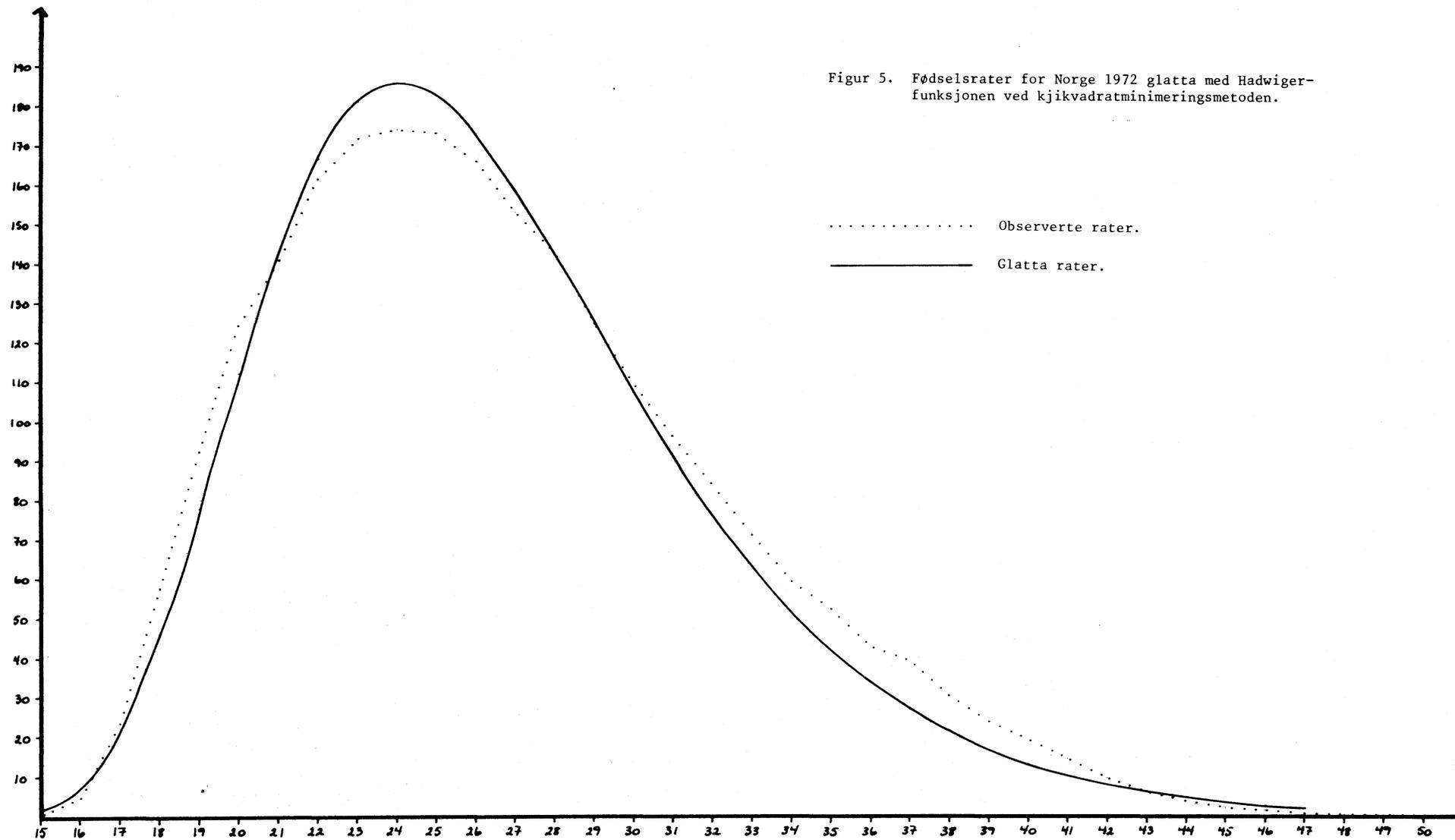
Figur 3. Fødselsrater for Norge 1970 glatta med Hadwiger-funksjonen ved kjkvadratminimeringsmetoden.

..... Observerte rater.
 — Glatta rater.



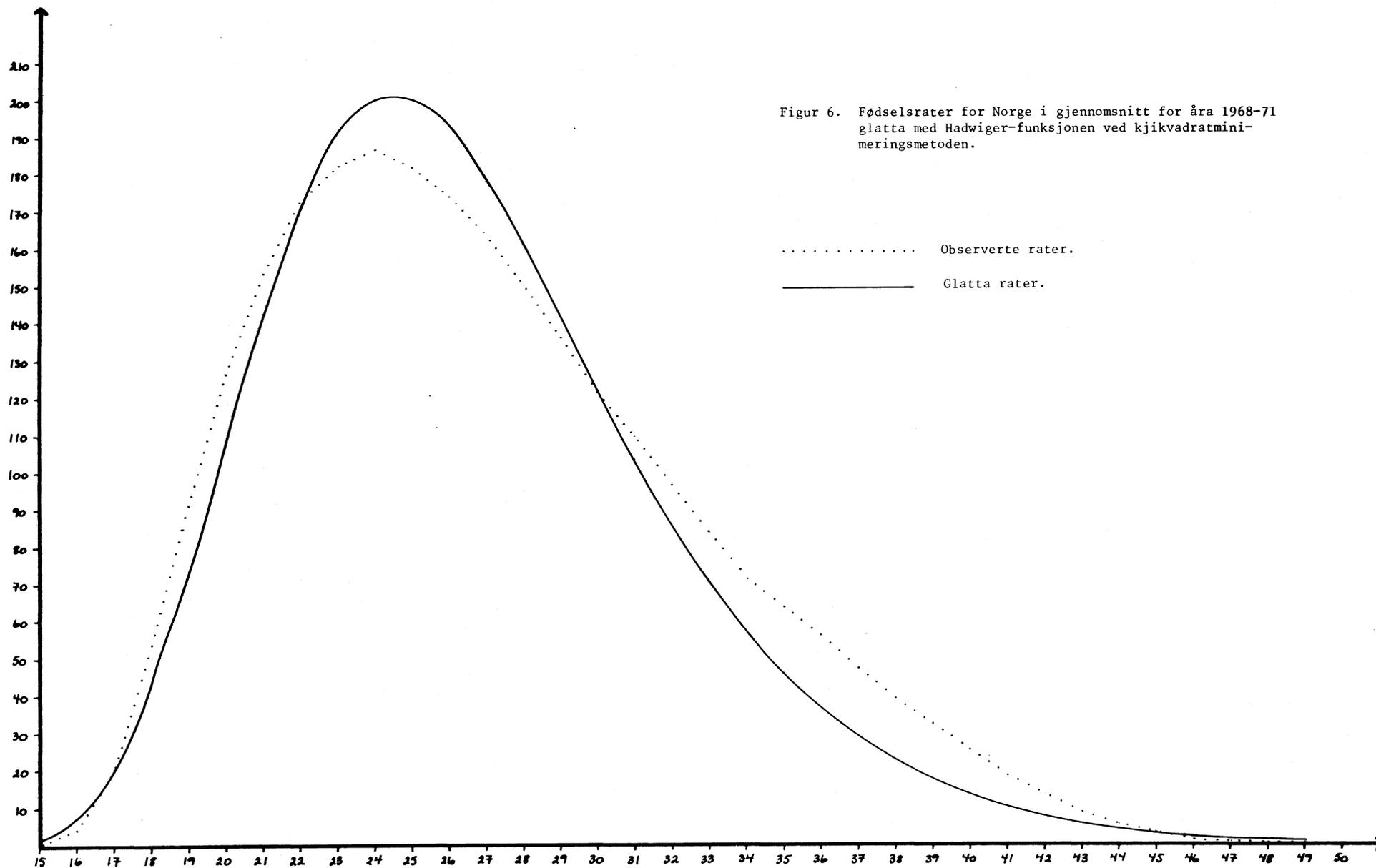
Figur 4. Fødselsrater for Norge 1971 glatta med Hadwiger-funksjonen ved kjkvadratminimeringsmetoden.

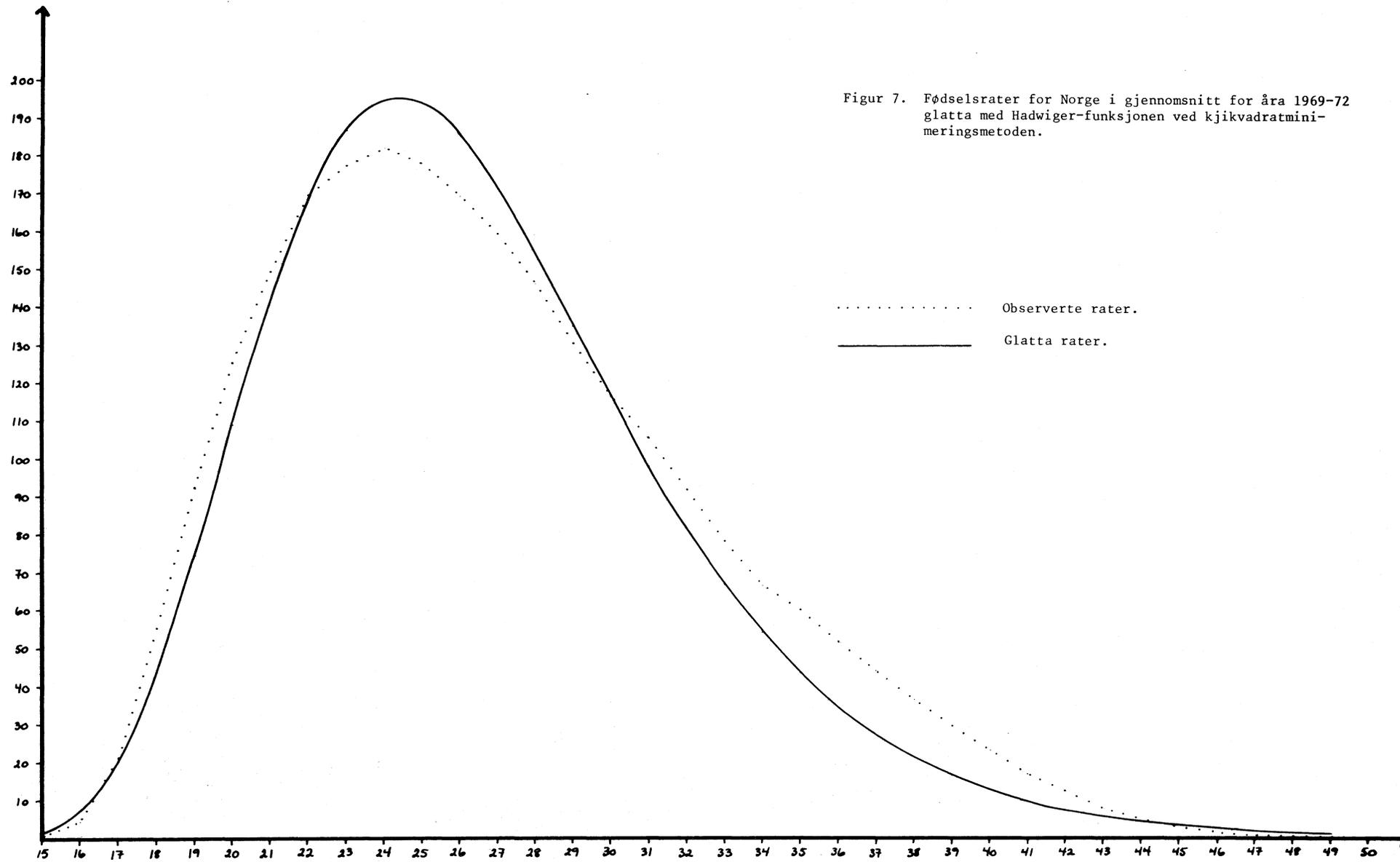
..... Observerte rater.
 — Glatta rater.



Figur 5. Fødselsrater for Norge 1972 glatta med Hadwiger-funksjonen ved kjikvadratminimeringsmetoden.

..... Observerte rater.
 ————— Glatta rater.





3. Utviding av modellen.

3.1. I tabell 2 finn vi tre ulike mål på tilpasninga av glattingane omtala i avsnitt 2.

Både for Hadwiger-glattingane og for GG-glattingane er kjikvadratverdien rett og slett enorm. Vi merkar oss likevel at GG-glattingane passar noko betre enn Hadwiger-glattingane.

3.2. I avsnitt 1.4 vart det framstilt eit resonnement som indikerte at kjønnsproporsjonen kan gi opphav til systematiske avvik fra ein modell som ville vere riktig i ei stasjonær befolkning. Vi rekna difor ut kjønnsproporsjonen

$$iK_x = L_{x+i}^m / L_x^k$$

for $i=1, 2$ og 3 og for $x=15, 16, \dots, 50$. Her er L_x^m antall x -årige menn og L_x^k er antall x -årige kvinner.

På figur 8 har vi for 1969 framstilt grafisk residualen fra glattinga, dvs. $\hat{\lambda}_x - h(x, \hat{\theta})$, saman med $({}_3K_x - 1.06)$. Samvariasjonen er tydeleg.

Tabell 2. Tilpasninga til nasjonale data for estimerte fødselsrater

År	$\chi^2(\hat{\alpha}-\hat{\beta})$	SQ(15-50) ^x	SQ(20-30) ^x
HADWIGER			
1968	1631.5	3 185	1 282
1969	1866.3	3 605	1 296
1970	1578.8	3 037	1 123
1971	1659.3	2 922	974
1972	1073.2	1 647	595
1968-71	9031.0	4 427	1 684
1968-72	8024.8	3 677	1 301
GAMMA			
1968	1242.1	2 186	821
1969	1467.1	2 578	877
1970	1186.3	2 086	746
1971	1241.2	1 981	614
1972	743.5	966	315
1968-71	7184.3	3 240	1 147
1969-72	6251.8	2 610	849

x I tusendeler.



Figur 8. Samvariasjonen mellom avvika fra dei glatta ratene i figur 2 og ein aldersspesifikk kjønnsproporsjon.

3.3. Vi utvidar modellen med kjønnsproporsjonen slik at vi får glattingsfunksjonen

$$f(x, \theta) = h(x, \theta_0) + A_3 K_x + B$$

til å glatte fødselsratene frå 1969 med. Her er h Hadwiger-funksjonen med den vanlege parametervektoren, som vi no kallar θ_0 . Parametervektoren θ i den nye glattingsfunksjonen får vi ved å legge dei to nye parametrane A og B til θ_0 . Alder kallar vi x og kjønnsproporsjonen altså $3K_x$.

Estimatet av fødselsraten til ei x -årig kvinne skulle da ifølge den nye modellen bli

$$\hat{\lambda}_x = f(x, \hat{\theta}) + \varepsilon_x,$$

der ε_x er eit tilfeldig feilledd med forventning null.

Programmeringa for å glatte med funksjonen f er beskriven i Berge (1974), Appendiks D. Estimatet av parameteren θ for 1969 finst i tabell 3.

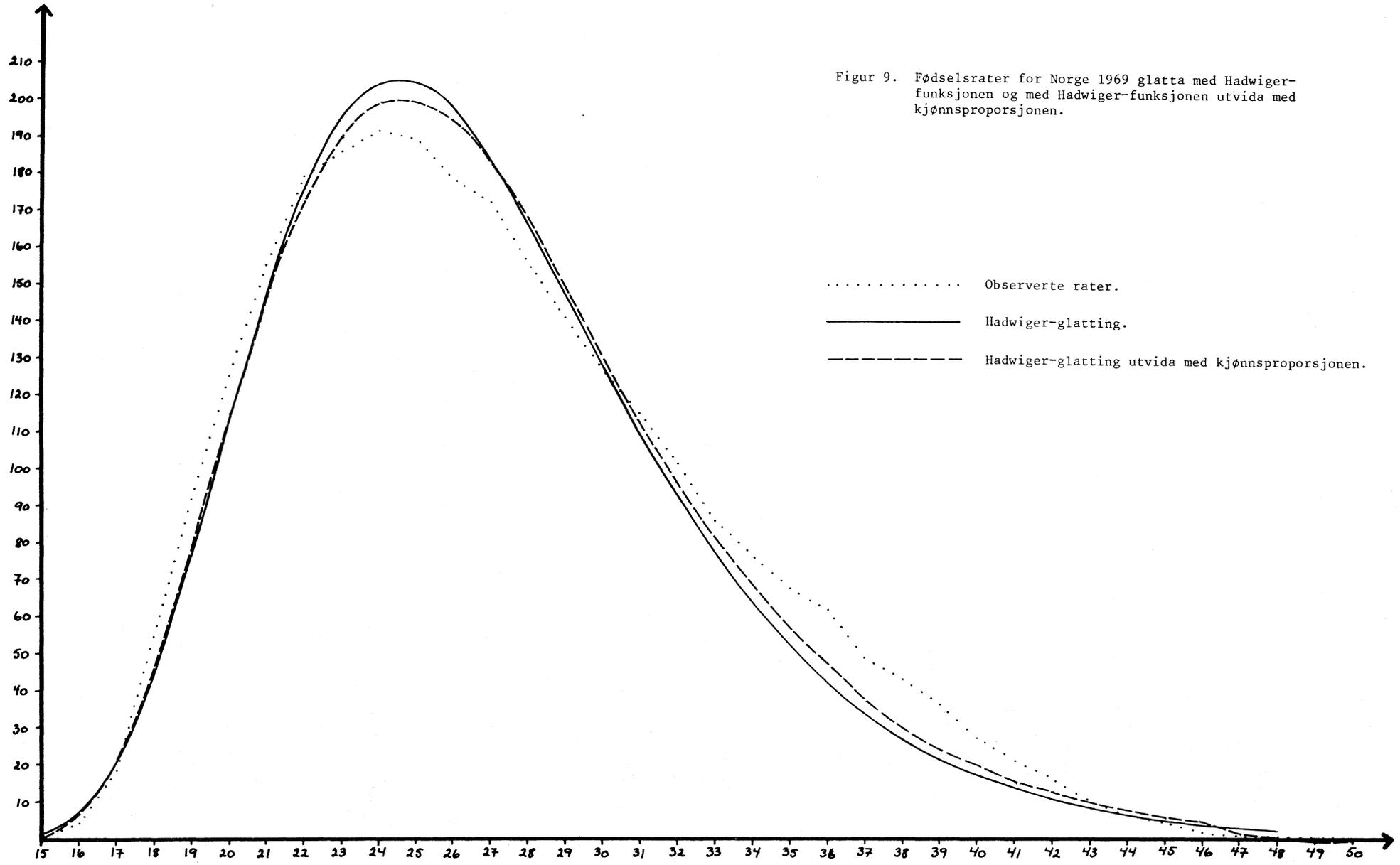
Tabell 3. Estimat av fertilitetsparametrar for 1969 i utvida modell.

Samla fertilitetstall	2.683
Modal fødealder	24.56
Gjennomsnittleg fødealder	27.10
Varians	34.00
A (i tusendeler)	14.71
B (i tusendeler)	-16.48

Vi merkar oss at det estimerte samla fertilitetstallet no ligg svært nært det observerte, som er på 2.696. I modal og gjennomsnittleg fødealder er endringane relativt små i høve til dei i tabell 1. Like interessant er det å sjå på kjikvadratverdien. Den er no redusert til 911.2, eller omlag halvparten av det opprinnelege. (Sjå tabell 2). Til samanlikning fann vi at GG-funksjonen reduserte kjikvadratverdien til 1467,1. (Sjå tabell 2). Ei utviding av Hadwiger-modellen gir altså tydeleg betre resultat enn eit skifte av modell frå Hadwiger- til GG-funksjonen.

Utvidinga av modellen burde gå like greitt for GG-funksjonen. Utforskinga av dette må imidlertid utsettast inntil vidare.

3.4. I figur 9 har vi teikna inn både den opprinnelege glatta kurva og kurva fra den utvida modellen. Som vi ser er forbetringa tydeleg, men ho er enno langt ifra å vere god nok.



Figur 9. Fødselsrater for Norge 1969 glatta med Hadwiger-funksjonen og med Hadwiger-funksjonen utvida med kjønnsproporsjonen.

- Observerte rater.
- Hadwiger-glatting.
- Hadwiger-glatting utvida med kjønnsproporsjonen.

4. Sluttord.

4.1. Verken Hadwiger-funksjonen eller GG-funksjonen synest å vere rette modellen for å glatte nasjonale fødselsrater med for Norge i dag. Sjølv med den mogelege utvidinga av modellen vi har peika på her, gir ikkje modellen ein tilstrekkeleg god representasjon av data. Det er tydeleg at ein både må finne fram til ein betre grunnmodell og studere vidare utbygging av den slik det har vore freista her.

Litteraturliste

Berge, Erling og Jan M. Hoem (1974): "Nokre praktiske erfaringar med analytisk glatting". Statistisk Sentralbyrå, ANO IO 74/23.

Berge, Erling (1974): "MINSYS; eit reknemaskinprogram for analytisk glatting av befolkningsrater". Statistisk Sentralbyrå, ANO IO 74/11.

Hoem, Jan M. og Erling Berge (1974a): "Some problems in Hadwiger fertility graduation". Statistisk Sentralbyrå, ANO IO 74/5.

Hoem, Jan M. og Erling Berge (1974b): "Theoretical and empirical results on the analytic graduation of fertility rates". I Hoem et.al.: "Two papers on analytic graduation". Statistisk Sentralbyrå, ANO IO 74/17.

Hoem, Jan M., Erling Berge og Liv Hansen (1974): "Norske fødselsrater for ettårige aldersklasser 1968-72". Side 19 til 33 i dette metodeheftet.